ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. MÜLLER-BRESLAU-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 3 :: Dezember 1923

:: Heft 6 :: Seite 401 bis 484

INHALT:



V•D•I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN SW 19

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Bd. 3 Ende Dezember 1923 Heft 6

Inhalt:

VORTRÄGE DER MARBURGER VERSAMMLUNG

Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht.[1]

Von L. PRANDTL in Göttingen.

Herr H. Hencky hat in seiner Abhandlung »Ueber einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern«[2] eine Gruppe von Sätzen über die Eigenschaften der Gleitlinienscharen plastischer Körper entwickelt, die für die Behandlung verschiedener Beispiele sehr wertvoll werden dürften. Für den einfachsten Fall, das ebene Problem des speziell plastischen Körpers lassen sich die Sätze durch eine ganz geringe Weiterführung des Gedankens zum zeichnerischen Aufbau einer großen Zahl von Lösungen verwenden, wie im folgenden gezeigt werden soll. Ob die entsprechenden Sätze für das rotationssymmetrische Problem einer ähnlichen Verwertung fähig sind, mag einstweilen noch dahin gestellt bleiben; bei der technischen Wichtigkeit gerade des rotationssymmetrischen Falles wäre dies sehr zu wünschen.

Die Sätze, an die ich anknüpfen will, lauten in etwas anderer Fassung als bei Hencky folgendermaßen:

Beim ebenen Problem des speziell-plastischen Körpers bilden die Gleitlinien zwei sich rechtwinklig kreuzende Scharen mit folgender besonderen Eigenschaft: schneidet man zwei Kurven der einen Schar mit beliebigen Kurven der zweiten Schar, so bilden die Tangentenpaare in den beiden Schnittpunkten jeder Kurve der zweiten Schar einen konstanten Winkel miteinander.

Läßt man die beiden Kurven der ersteren Schar einander unendlich nahe rücken, so ergibt sich eine Beziehung zwischen den Krümmungsradien. Bezeichnet man mit α-Kurven und β-Kurven die Kurven der Scharen $\alpha =$ konst. und $\beta =$ konst. und wird

[1] Vorgetragen auf der Versammlung in Marburg am 24. September 1923.

[2] Diese Zeitschr. 3, 1923, S. 241 bis 251.

der Krümmungsradius einer α-Kurve mit R_α bezeichnet, der Krümmungsradius einer β-Kurve mit R_β, die Bogenlängen der α- bezw. β-Kurve mit s_α, s_β, so ist

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial s_\beta} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial R_\beta}{\partial s_\alpha} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots (1).$$

Aus dieser Henckyschen Beziehung ergibt sich nun sofort durch Integration

$$R_\alpha = s_\beta + f_1(\beta) \quad \text{und} \quad R_\beta = s_\alpha + f_2(\alpha) \quad \ldots \ldots (2).$$

Herr Hencky äußert (a. a. O. S. 245 oben), daß die Gleichungen, in denen er seine Sätze ausdrückt, nur befriedigt seien, wenn das Gleitliniensystem ein rechtwinkliges oder ein Polar-Koordinaten-System wird. Die Mannigfaltigkeit von Kurvenscharen, welche die obigen Sätze befriedigen, ist aber zum Glück viel allgemeiner. Ein besonders einfaches Beispiel bietet schon das dickwandige Rohr mit Innen- oder Außendruck. Hier sind die Spannungslinien Kreise und Radien, die Gleitlinien daher logarithmische Spiralen mit 45^0 Steigung. Die Gleichungen (1) und (2) sind dabei in der Tat erfüllt, denn, wie leicht nachgerechnet werden kann, ist bei dieser Spirale der Krümmungsradius gerade gleich der vom Zentrum aus gerechneten Bogenlänge. Ein weiteres Beispiel, bei dem die Gleitlinien aus zwei Scharen von sich kreuzenden gemeinen Zykloiden bestehen, wird unten noch erwähnt werden.

Die allgemeine Lösung für unser Gleitliniensystem [1]) ergibt sich, wenn den beiden Funktionen $f_1(\beta)$ und $f_2(\alpha)$ irgend welche Werte erteilt werden. Der hyperbolische Charakter der zugrunde liegenden Differentialgleichung (die Gleitlinien sind die Charakteristiken [2]) der Differentialgleichung der Airyschen Spannungsfunktion) bringt es mit sich, daß die Funktionen $f_1(\beta)$ und $f_2(\alpha)$ sogar Sprünge aufweisen dürfen. Die physikalische Bedeutung verlangt von den beiden Funktionen nur, daß $\int \frac{d s_\alpha}{R_\alpha}$ und $\int \frac{d s_\beta}{R_\beta}$ existieren, da dies die Winkel sind, die die Anfangs- und Endtangente eines Kurvenstücks miteinander bilden. Bezüglich des Vorzeichens der Krümmungsradien sei erwähnt, daß dieses immer so zu nehmen ist, wie es konzentrischen Kreisen entspricht und nicht so, wie es bei konzentrischen Hyperbeln wäre.

Zur geometrischen Veranschaulichung nehmen wir zunächst eine Kurve der α-Schar als gegeben an und setzen dabei der Einfachheit halber voraus, daß sie keinen Knick hat und, von einer endlichen Anzahl von Punkten abgesehen, überall einen Krümmungsradius besitzt. Die Bogenlängen der β-Kurven mögen von dieser Ausgangskurve aus gerechnet werden, dann ist auf ihr überall $s_\beta = 0$ und nach Gl. (2) also $f_1(\beta) = R_\alpha =$ gegeben. Ist nun außerdem für irgend einen Punkt der gegebenen Kurve der Krümmungsradius der kreuzenden β-Kurve, R_β, gegeben, d. h. der bezügliche Funktionswert von $f_2(\alpha)$, dann folgt durch Gl. (2) R_β für alle Punkte der gegebenen α-Kurve.

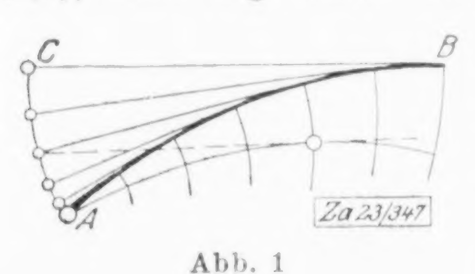


Abb. 1

Die in Gl. (2) gegebene Vorschrift besagt geometrisch, daß an jedem Punkt der gegebenen Kurve der Radius der kreuzenden Kurve gleich der von einem gegebenen Punkt aus gerechneten Bogenlänge der gegebenen Kurve ist. Anders ausgesprochen: Die Krümmungsmittelpunkte der kreuzenden Kurven liegen auf der Evolvente, die von dem gegebenen Punkt aus zu der gegebenen Kurve konstruiert wird; zufolge der Rechtwinkligkeit des Netzes liegt natürlich jeder Mittelpunkt auf der Tangente, die im Kreuzungspunkt die gegebene Kurve berührt, vergl. (Abb. 1) (AB = gegebene Kurve, A = gegebener Punkt, AC = Evolvente, BC = Krümmungsradius der kreuzenden Schar in Punkt B).

Die angedeutete Konstruktion liefert kleine Stücke der zweiten Kurvenschar. Sobald diese vorliegen, kann eine zweite Linie der ersten Kurvenschar leicht auf erste Ordnung genau gezeichnet werden, da ihre Tangenten genähert nach den erwähnten Krümmungsmittelpunkten gerichtet sind; sie können dann nach der auch für sie geltenden

[1]) Meine mündlichen Ausführungen über diesen Punkt waren unrichtig. Die Anregung zur erneuten Untersuchung verdanke ich einer von Herrn v. Mises gemachten Einwendung.

[2]) Herr v. Mises macht mich darauf aufmerksam, daß ich das Wort »Charakteristik« in einem von dem herkömmlichen abweichenden Sinn gebraucht habe. Ich meine damit in Uebertragung des bei der linearen hyperbolischen Differentialgleichung vorkommenden Begriffs jede Linie, längs deren die Lösung unanalytisch zusammengeflickt werden darf, ohne die Differentialgleichung zu verletzen.

Radienregel verbessert werden, wozu die Krümmungsradien der gegebenen Kurve dienen. Beim Fortschreiten in einer zweiten Reihe von Netzmaschen ist auf der neu gewonnenen α-Kurve entsprechend dem veränderten $f_2(\alpha)$ ein neuer Punkt A festzulegen, worauf das Verfahren seinen Fortgang nimmt. Sind von Anfang an zwei sich kreuzende Kurvenstücke, eine α-Kurve und eine β-Kurve gegeben, so ist dadurch das Kurvennetz in dem von Gleitlinien gebildeten Kurvenviereck definiert, das man durch Ziehen der beiden β-Kurven durch die Enden des α-Kurvenstücks und der beiden α-Kurven durch die Enden des β Kurvenstücks erhält. Gehen alle α-Kurven durch einen Punkt A, so ist dort notwendig $R_\beta = 0$; in diesem Falle ist das Netz durch eine α-Kurve und dem Punkt A gegeben.

Eine auffällige Eigenschaft der in Rede stehenden Kurvenscharen mag hier noch erwähnt werden. Ist die eine gegebene Kurve ein Stück weit eine Gerade, so ist dort der Radius unendlich, der zugehörige gegebene Punkt also unendlich fern. Daraus ergibt sich sofort, daß, wenn man die zwei Kurven der zweiten Schar in den Endpunkten des Geradenstückes zieht, sämtliche Linien der ersten Schar in der Gasse zwischen diesen beiden Kurven ebenfalls Geradenstücke sein müssen. Endsprechendes gilt natürlich auch für einen Wendepunkt, der ein unendlich kurzes Geradenstück darstellt.

Bevor nun einzelne Beispiele besprochen werden, müssen einige allgemeine Bemerkungen vorausgeschickt werden. Die Lösungen dürfen längs der Gleitlinien unanalytisch zusammengesetzt werden, was damit zusammenhängt, daß die Gleitlinien die Charakteristiken der hyperbolischen Differentialgleichung sind. Das Gleichgewicht verlangt dabei Stetigkeit der Spannungskomponente an der Grenze zweier Gebiete. Vor dem Fehler, daß man versehentlich Schubspannungen von entgegengesetzten Vorzeichen aneinander fügt, schützt man sich am besten dadurch, daß man unter Beachtung des Umstandes, daß während des plastischen Gleitens beim ebenen Problem Volumenänderungen nicht vorkommen, die Gleitbewegungen im einzelnen näher verfolgt, also z. B. die Stromlinien zeichnet oder dergleichen. Man erkennt auf die Weise, daß in der Henckyschen Abb. 3 die Linie MOM keine mögliche Begrenzung des plastischen Gebietes darstellt, denn wenn man etwa die Linien AC und BD als gegen den plastischen Körper vorrückend annimmt, so findet man durch Zeichnung der Stromlinien sehr rasch, daß die Linie CD dann aus dem plastischen Körper herausgeschoben wird. Die Begrenzung MOM kann also nur eintreten, wenn auf der mittleren Fläche CD nicht Druck, sondern Zug herrscht, der sich durch Umkehrung der bezüglichen Vorzeichen bei Hencky leicht ermitteln ließe.

Was die Frage der Eindeutigkeit der Lösung betrifft, so scheint mir der Henckysche Vorschlag, am besten wohl in der Form, daß diejenige Lösung gelten soll, welche die geringsten Kräfte liefert, sehr zweckmäßig zu sein. Da bei der Art der Behandlung der Aufgabe, wie sie hier vorliegt, das Verhalten der elastisch bleibenden Teile des Körpers nicht weiter studiert wird, wird man häufig ganze Scharen von Lösungen angeben können, die die Bedingungen des plastischen Gleichgewichts befriedigen. Denkt man sich eine allmähliche Steigerung der äußeren Lasten, so wird eine plastische Bewegung möglich, sobald die äußeren Lasten den erwähnten Minimalwert erreichen, und da nun Bewegung einsetzt, erfolgt auch keine weitere Steigerung der Belastung. Diese Ueberlegung ist natürlich kein Beweis für die Richtigkeit des Satzes, denn es ist immerhin denkbar, daß beim stetigen Uebergang vom elastischen Zustand zum ausgebildeten plastischen Zustand (über welchen Uebergang die heutige Theorie noch nichts auszusagen vermag), sich andere Zustände ausbilden als gerade derjenige mit geringstem Widerstand. Immerhin ist zu erwarten, daß wenigstens die wirklichen Lasten nicht sehr verschieden von dem Minimalwert sein werden. In Ermanglung von etwas Besserem soll also auch hier an der Henckyschen Forderung festgehalten werden. Man wird also im allgemeinen unter Einhaltung dieser Forderung eine eindeutige Lösung erhalten. Das Henckysche Beispiel liefert allerdings, da die beiden Begrenzungen $M'O'M'$ und $M''O''M''$ zu genau derselben Last führen, zwei verschiedene, gleich berechtigte Lösungen, allerdings nur unter der von Hencky stillschweigend gemachten Annahme, daß der Stempel völlig reibungslos sei. Will man dem Stempel auch nur geringe Reibung zuerkennen, so bleibt nur die meiner ursprünglichen Lösung entsprechende Begrenzung, nämlich $M''O''M''$ übrig, wie man aus dem Studium der Bewegung der Teilchen der gedrückten Oberfläche leicht erkennt, wie sich aber auch durch Ausführung der Konstruktion unter Hinzunahme einer gleitenden Reibung leicht ergibt (vergl. auch unten). Bei Annahme von Reibung an der Stempeloberfläche ergeben sich natürlich wieder zwei Lösungen

in dem Fall, daß ein endliches Flächenstück des Stempels sich gerade in dem Grenzzustand zwischen Gleiten und Nichtgleiten befindet, wobei sich dann verschiedene plastische Bewegungen ergeben, je nachdem man Gleiten oder Nichtgleiten annimmt. Wenn man von solchen Einzelfällen absieht, in denen zu einer Last zwei endlich verschiedene Fließzustände gehören, so dürfte die Henckysche Regel im allgemeinen zu einer eindeutigen Lösung führen.

Was nun die Beispiele betrifft, so sei zuerst eines gegeben, das aus dem Henckyschen Beispiel hervorgeht, wenn man von dem Polygon zur Kurve übergeht. Ich will hier das Eindringen eines gerundeten Stempels mit reibender Oberfläche behandeln. Die freie Oberfläche des plastischen Körpers sei dabei eben, es werde also von den Auftreibungen zu beiden Seiten, die das bisherige Eindringen des Stempels verursacht hat, abgesehen. Ist der Reibungswinkel $= \varphi$, die Druckkraft also dort, wo Gleitung stattfindet, um den Winkel φ gegen die Normale geneigt, so braucht man nur die Gleitlinien unter dem Winkel $45^0 - \varphi$ an die bezüglichen Elemente der Stempeloberfläche anzutragen (vergl. Abb. 2). Aus dem Umstande, daß die Gleitlinien sich rechtwinklig schneiden müssen, ergibt sich, daß innerhalb des Gebietes $C\,D\,O$ keine Gleitung mehr erfolgt. Die Linie $C\,D$ umfaßt denjenigen Teil des Stempels, wo die Neigung gegen die Wagerechte geringer ist als φ. Zwischen C und D findet also kein Gleiten statt, wohl aber innerhalb $A\,C$ und $D\,B$. Vom Punkt O sind die Kurven $O\,E$ und $O\,F$ orthogonal zur Gleitlinienschar zu ziehen, seitlich schließen sich die Kreissektoren $A\,E\,G$ und $B\,F\,H$ und die Dreiecke $A\,G\,J$ und $B\,H\,K$ in gewohnter Weise an. Die gezeichneten Verhältnisse beziehen sich zunächst auf senkrechtes Eindringen des Stempels. Für mäßig schräges Eindringen ergibt sich nur eine Unsymmetrie in den Beträgen der Gleitung, aber noch dasselbe Gleitlinienbild und dieselben Kräfte, bei stärkerer Schräge aber auch ein unsymmetrisches Bild der Gleitlinien, dessen nähere Untersuchung jedoch hier zu weit führen würde.

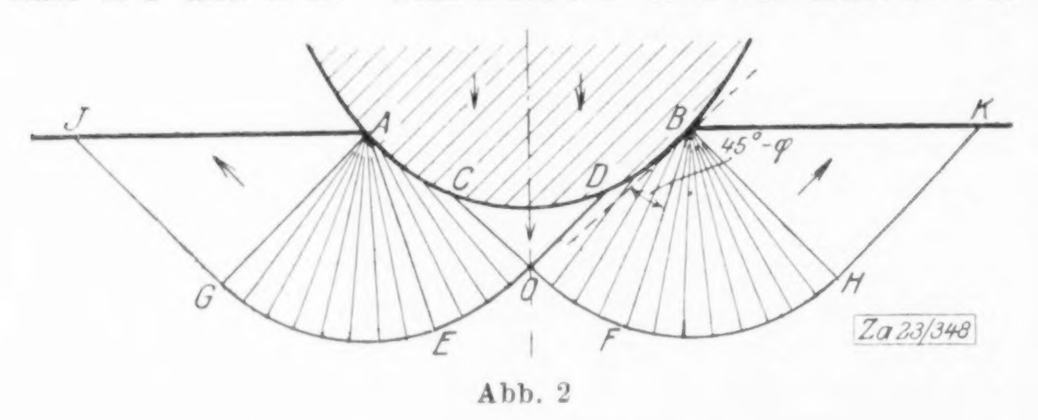


Abb. 2

Beim Eindringen eines Stempels in eine Platte von nicht zu großer Dicke d wird das vom Stempel verdrängte Material nicht aus der Oberfläche herausgepreßt, sondern unter Auseinanderdrücken der beiden Hälften der Platte (N. B.! immer ebenes Problem!) nach unten zusammengestaucht. Eine mögliche Lösung, von der allerdings im Augenblick nicht angegeben werden kann, ob sie diejenige des kleinsten Widerstandes ist, wird nach Abb. 3 erhalten. Hier schließen sich an das undeformiert bleibende Dreieck $A\,B\,C$ zwei Kreissektoren $A\,C\,D$ und $B\,C\,E$. Um die Fortsetzung des Gleitlinienfeldes nach unten zu finden, werde das eingangs geschilderte Verfahren auf die Linie $A\,C\,E$ als gegebene Kurve angewandt und es werde angenommen, daß alle Kurven der einen Schar durch den Punkt A gehen. Man erhält so einerseits den Sektor $A\,C\,D$, andererseits das Kurvenviereck $C\,E\,F\,D$. Das Gleitlinienfeld kann offenbar nach den Seiten und nach unten zu beliebig fortgesetzt werden, und es ergeben sich so Lösungen für verschieden dicke Platten. Um die Kraft P im Stempel zu bestimmen, müssen noch Annahmen über die Lagerung der Platte gemacht werden. Liegt sie etwa mit Reibung satt auf der unteren Fläche auf, so muß für das Verschieben der beiden undeformiert bleibenden Plattenhälften eine wagerechte Kraft $^1/_2\,\mu\,P$ aufgebracht werden ($\mu =$ Reibungsziffer). Die wagerechte Komponente der Spannungen an der Grenzfläche $A\,D\,F$ muß nun gerade diesen Betrag liefern. Nun sind die Spannungen durch die Henckysche Gl. (6b) bis auf einen über das Spannungsfeld gelagerten allseitig gleichen Druck bestimmt. Dieser

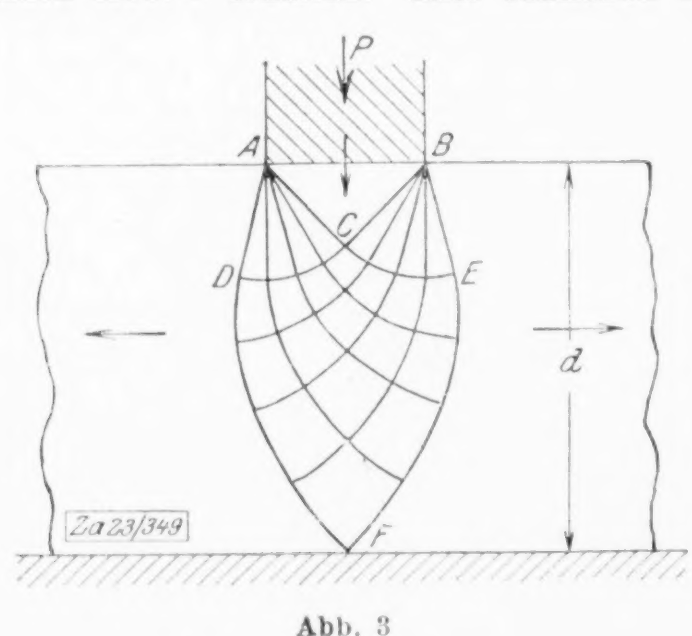


Abb. 3

folgt also aus unserer obigen Vorschrift und es ist damit auch P gegeben. Der in Abb. 3 gezeichnete Vorgang erfordert offenbar um so größere Kräfte P, je dicker die Platte ist, da mit zunehmender Dicke die Winkel der beiden Sektoren immer größer werden. Es ergibt sich nun eine Grenzdicke, bei der das Herauspressen des Materials nach oben in der in meiner früheren Arbeit angegebenen Art die gleiche Kraft erfordert. Bei noch dickeren Platten tritt dann dieser Vorgang anstelle des hier geschilderten. Es sei noch erwähnt, daß vorerst die Annahme, daß das undeformiert bleibende Dreieck ABC geradlinig begrenzt ist, in keiner Weise bewiesen ist. Es ist leicht möglich, daß die Annahme von passend gekrümmten Linien AC und BC, die sich natürlich bei C wieder rechtwinklig schneiden müssen, zu geringeren Kräften P führt.

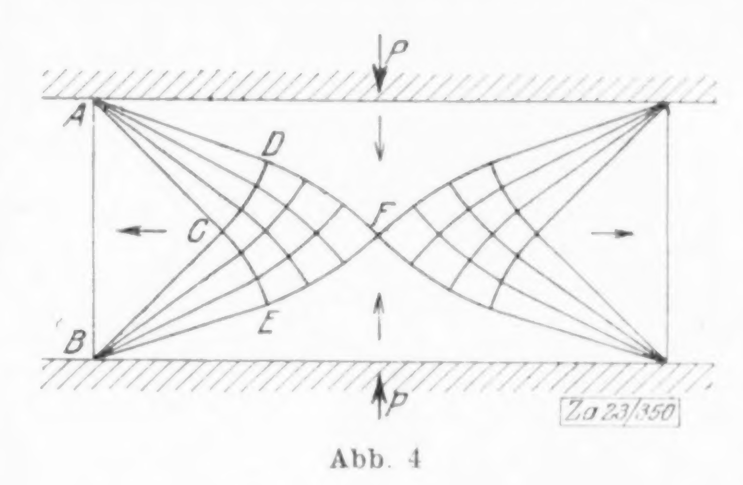


Abb. 4

Ein weiteres Beispiel, das dem vorigen sehr verwandt ist (für das natürlich das soeben erwähnte Bedenken ebenfalls gilt), bezieht sich auf einen plastischen Körper, der mehr breit als hoch ist und der zwischen harten Druckplatten gepreßt werden soll. Die Abb. 4 ergibt alles Nötige, so daß eine Besprechung der Einzelheiten sich wohl erübrigt.[1]) Ist die Dicke des Körpers sehr gering gegenüber der Breite — man denke z. B. an eine Bleizwischenlage zwischen zwei Steinquadern —, so rücken die Punkte D und E an die Wand und es ergibt sich, wenn man z. B. wieder von der Linie ACE ausgeht, zunächst nur das Kurvennetz bis zum Punkt F. Nimmt man genügende Rauhigkeit der Quaderoberflächen an, so erfolgt alle Gleitung nur in Blei, und zwar ist zu erwarten, daß beim plastischen Auseinanderquetschen die Druckflächen selbst Gleitflächen sind. Mit dieser Annahme ergibt sich eine Fortsetzung des Netzes nach Abb. 5, wobei für das Innere jeweils wieder unsere Konstruktion zur Anwendung kommt.

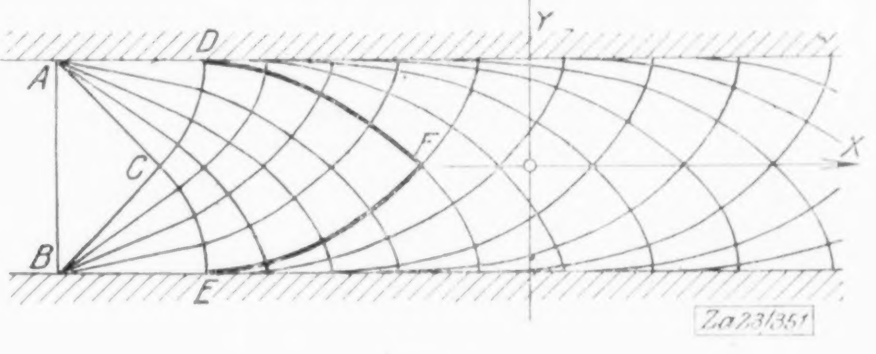


Abb. 5

Der Zustand, wie er sich genügend weit vom freien Rand asymptotisch ausbildet, ist der Rechnung zugänglich; ich möchte die Formeln, die ich seit einiger Zeit besitze und deren Erweiterung auf den Fall des allgemeinen plastischen Körpers in einer in Arbeit befindlichen Dissertation behandelt wird, hier kurz mitteilen. Wird eine X-Achse durch die Mitte der Platte gelegt (mit der positiven Richtung nach der Mitte der plastischen Platte zu) und liegt die Y-Achse in der Richtung der Druckkraft, so ergeben sich für eine Plattendicke $= 2h$ die folgenden Spannungskomponenten:

$$\sigma_x = -\frac{kx}{h} + C + 2k\sqrt{1-\left(\frac{y}{h}\right)^2}, \qquad \sigma_y = -\frac{kx}{h} + C, \qquad \tau = k\frac{y}{h} \quad . \quad . \quad (3).$$

Das Gleichgewicht der Spannungen ist, wie man leicht sieht, erfüllt. Die maximale Schubspannung, die beim speziell plastischen Körper konstant sein soll, wird

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} = k.$$

Der Spannungszustand liefert also eine gleichmäßige Zunahme des mittleren Druckes $p = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ nach dem Innern zu vom Betrage k/h für die Längeneinheit, daneben zusätzlich Spannungen, die nur von y abhängen.

[1]) Es verdient hierbei erwähnt zu werden, daß bei Druckversuchen mit gewissem Gesteinsmaterial, das vor dem Bruch geringe plastische Formänderungen erleidet, wie z. B. Marmor, die unzerstört bleibenden Teile bei niedrigen Proben weitgehend den elastisch bleibenden Teilen in Abb. 4 entsprechen.

Um gleich eine Berechnung der Gleitlinien anzuschließen, benutzen wir die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau} = -\frac{\sqrt{h^2 - y^2}}{y}$$

und erhalten daraus für die eine Schar

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{h-y}{h+y}} = -\frac{\sqrt{h^2-y^2}}{h+y} \quad \ldots \ldots \ldots (4),$$

was für die Gleitlinie die Gleichung

$$-x = h \arcsin \frac{y}{h} + \sqrt{h^2 - y^2} + c,$$

d. h. eine gemeine Zykloide ergibt. Es wäre nun nachzuweisen, daß die in Gl. (1) gegebene Radienbedingung erfüllt ist. Der Radius rechnet sich unter Berücksichtigung von Gl. (4) zu

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 x}{d y^2}} = 2\sqrt{2h(h+y)},$$

und es ist damit, da $d s_\beta = d y / \cos \varphi$ zu setzen ist,

$$\frac{d R_\alpha}{d s_\beta} = \frac{d R}{d y} \cos \varphi = \sqrt{\frac{2h}{h+y}} \cdot \sqrt{\frac{h+y}{2h}} = 1.$$

Es wäre zu wünschen, daß auch für andere Bereiche als für den einfachen Streifen die zugehörigen Gleitliniensysteme gefunden würden. Das Gleitliniensystem für den Keilraum z. B. würde das Studium der Vorgänge beim Auspressen von plastischem Material aus Oeffnungen wenigstens qualitativ ermöglichen. Wichtig wäre natürlich auch der Uebergang vom ebenen Problem zum achsensymmetrischen, doch fürchte ich, daß die mathematischen Schwierigkeiten hier sehr groß sein werden. Die Art, wie Hencky das achensymmetrische Problem der Eindringungsfestigkeit behandelt, zeigt übrigens, wie man zu überschläglichen Ergebnissen schon durch verhältnismäßig einfache Abschätzungen gelangen kann. Ich glaube allerdings, daß man, um eine bessere Annäherung an die Erfahrung zu bekommen, die gewiß nicht geringe Reibung zwischen Stempel und plastischem Körper wird berücksichtigen müssen; das Gleitlinienbild wird dabei wohl von dem von Hencky angegebenen stark verschieden sein und sich wahrscheinlich dem von mir für das ebene Problem angegebenen einigermaßen nähern. 348

Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie.

Von **R. v. MISES** in Berlin.[1]

Sowohl die klassische Elastizitätstheorie wie die sogenannte technische Mechanik beschäftigen sich fast ausschließlich mit den Bedingungen des Gleichgewichtes, das an einem elastischen Körper zwischen inneren und äußeren Kräften möglich ist. Nur gelegentlich und in vereinzelten Fällen wird die Frage gestellt und beantwortet, ob der berechnete Gleichgewichtszustand ein stabiler ist, d. h. die Eigenschaft besitzt, sich nach kleinen Störungen von selbst wieder herzustellen. Als erster hat Euler (1744), lange bevor es eine vollständige Elastizitätstheorie gab, die Stabilitätsbedingung für eine gerade, in ihrer Achse belastete Säule berechnet. Der Ausdruck

$$P = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

(l, J, E Länge, Querschnittsmoment und Elastizitätszahl der Säule, P Belastung an der Stabilitätsgrenze) ist heute jedem Techniker unter dem Namen der »Eulerschen Knick-

[1]) Der folgende Aufsatz stellt im wesentlichen den Inhalt eines auf der Marburger Versammlung am 24. September 1923 gehaltenen Vortrages dar. Die Einzelausführungen und Ableitungen der hier mitgeteilten Ergebnisse sollen in drei besonderen Aufsätzen über die »Knicksicherheit von Fachwerken«, die »Stabilität von Rahmentragwerken« und »Grundsätzliche Fragen der Stabilitätstheorie« später veröffentlicht werden.

formel« geläufig. Eine große Zahl verschiedener Einzelfälle ist im Anschluß an das Eulersche Problem, namentlich in neuerer Zeit, behandelt worden. Ich habe mir zunächst die Aufgabe gestellt, ganz allgemein die Stabilitätsbedingungen für solche elastische Körper aufzusuchen, die aus endlich vielen oder abzählbar unendlich vielen geraden Stäben bestehen, diese mögen nun gelenkig oder biegungssteif aneinander geschlossen sein. Dabei bin ich vor allem auf eine sehr einfache Erscheinung gestoßen, die bisher, wie es scheint, unbekannt geblieben ist, obwohl sie gewiß schon an sich einiges technische Interesse in Anspruch nehmen darf. Es ist das die Tatsache, daß auch der geläufige, alltäglich betrachtete Gleichgewichtszustand eines einfachen Fachwerks mit idealen Gelenken unstabil sein kann, und zwar unter besonders leicht realisierbaren und in der Technik oft realisierten Umständen. Ich nenne diese Erscheinung die »reine Fachwerkknickung« und stelle ihr sodann als einen zweiten Grenzfall den der »reinen Rahmenknickung« gegenüber, bei der die Stäbe als biegungssteif, aber keiner Dehnung fähig angesehen werden. Aus der Zusammenfassung beider Ansätze ergibt sich ohne weiteres die Stabilitätstheorie des allgemeinsten Stabwerkes mit steifen oder gelenkigen Knoten, eine Theorie, die zahlreiche Fragen der praktischen Baustatik zu beantworten gestattet.

Der Gedankengang meiner Untersuchung hat aber, gerade von dem Ausgangspunkt der reinen Fachwerkknickung aus, noch in andere Richtung geführt. Bekanntlich wird in den Anfangsgründen der mathematischen Elastizitätstheorie ein Satz bewiesen über die »Eindeutigkeit des elastischen Gleichgewichtsproblems«, der mit dem Vorhandensein unstabiler Gleichgewichtszustände, oder jedenfalls mit dem Uebergang von stabilen zu unstabilen Zuständen, in einem gewissen Widerspruch steht. Denn Eindeutigkeit der Lösung verträgt sich nicht mit dem Auftreten von »Verzweigungsstellen« des Gleichgewichts. Die übliche Erklärung, daß es sich in den Fällen, in denen Instabilität in Frage kommt, um Verschiebungen oder Formänderungen von grundsätzlich anderer Größenordnung handelt, trifft nicht zu. Dagegen gelangt meine Betrachtungsweise zu einer, wie ich glaube, befriedigenden Aufklärung der Verhältnisse und zu einer allgemeinen widerspruchsfreien Formulierung, die an die Stelle des Kirchhoffschen Eindeutigkeitssatzes zu treten hat.

1. Reine Fachwerkknickung, allgemeiner Ansatz. Wir betrachten, der Einfachheit halber in der Ebene, eine Gesamtheit von k Punkten oder »Knoten«, die durch s gerade Linien oder »Stäbe« verbunden sind und (skalar gezählt) m Bewegungsbeschränkungen oder »Auflagerbedingungen« unterworfen werden. Abb. 1 zeigt ein Beispiel mit $k = 5$, $s = 7$, wobei der Knoten 1 völlig festgehalten ist (2 Bedingungen), der Knoten 5 nur wagerechte Beweglichkeit besitzt (1 Bedingung), so daß $m = 3$. Die Forderung der »statischen Bestimmtheit« $s = 2k - 3$ setzen wir im allgemeinen nicht als erfüllt voraus, nehmen aber an, daß das System eine »natürliche« Lage besitzt, in der jeder Stab seine »natürliche Länge« l hat und weder innere noch äußere Kräfte wirksam sind. Als ideales »Fachwerk« wird das System gekennzeichnet durch die folgende physikalische Festsetzung: Haben in irgend einer Lage, die von der natürlichen verschieden, aber mit den Auflagerbedingungen verträglich ist, die einzelnen Stäbe die Längen a, so wirkt in jedem Stabe eine Stabkraft S von der Größe

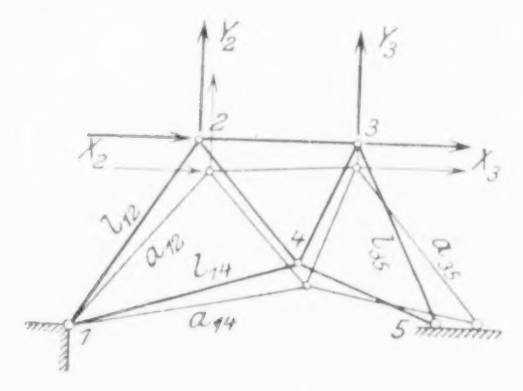


Abb. 1

$$S = E F \frac{a-l}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Dabei bedeuten E, F gegebene Konstante des Stabes, nämlich die Elastizitätszahl (Youngschen Modul) seines Materials und die Querschnittsgröße. Um das Gleichgewicht aufrecht zu erhalten, muß jetzt an dem $\varkappa$-ten Knoten eine äußere Kraft angreifen, deren rechtwinkelige Komponenten $X_\varkappa$, $Y_\varkappa$ mit den Stabkräften durch die Gleichungen

$$\sum_\iota S_{\iota\varkappa} \cos \alpha_{\iota\varkappa} = X_\varkappa, \quad \sum_\iota S_{\iota\varkappa} \sin \alpha_{\iota\varkappa} = Y_\varkappa$$

verknüpft sind. Unter Benutzung von (1) kann man hierfür in leicht verständlicher Abkürzung auch schreiben:

$$\sum_\iota \left[E F \frac{a-l}{l} \begin{matrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{matrix} \right]_{\iota\varkappa} - \begin{matrix} X_\varkappa \\ Y_\varkappa \end{matrix} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Dabei ist natürlich $\alpha_{\iota\varkappa}$ der Winkel des vom Knoten ι zum Knoten $\varkappa$ reichenden Stabes mit der x-Achse und die Summation ist über alle jene Indices ι zu erstrecken, die den mit dem $\varkappa$-ten Knoten durch Stäbe verbundenen Knoten entsprechen. (Wenn man für die nicht vorhandenen Verbindungen $F_{\iota\varkappa} = 0$ setzt, kann man die Summation auch einheitlich von $\iota = 1$ bis k laufen lassen.) Die Gesamtheit der $2\,k$ Gleichungen der Form (2) bestimmt bei gegebener Lage aller Knotenpunkte alle äußeren Kräfte, sowohl die eigentlichen Belastungen wie die Auflagerkräfte. Wir wollen aber unter dem »reduzierten System der Gl. (2)« nur die $2\,k - m$ Gleichungen verstehen, die übrig bleiben, wenn man die die Auflagerkräfte enthaltenden fortläßt, bezw. die m Auflagergrößen eliminiert. Im Falle der Abb. 1 wären also die beiden Gleichungen für $\varkappa = 1$ und die Y-Gleichung für $\varkappa = 5$ wegzulassen. Wir gehen hier nicht darauf ein, in welcher Weise die Gl. (1) zusammen mit dem reduzierten System (2) das gewöhnliche Spannungsproblem der Fachwerktheorie lösen. Für uns ist nur wichtig, daß man (2) aus dem allgemeinen **Prinzip der virtuellen Verrückungen** gewinnen kann, indem man von dem Ausdruck für die Gesamtenergie U ausgeht. Bezeichnen $x_\varkappa$, $y_\varkappa$ die Koordinaten des $\varkappa$-ten Knotens, so ist

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\iota\varkappa} \left[\frac{E\,F}{l}(a-l)^2\right]_{\iota\varkappa} - \sum_{\varkappa} (X_\varkappa\, x_\varkappa + Y_\varkappa\, y_\varkappa) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und das reduzierte System (2) entsteht, indem man die Ableitungen von U nach jeder freien, d. h. durch die Auflagerbedingungen nicht festgelegten, Koordinate gleich Null setzt. Denn die Ableitung von $a_{\iota\varkappa}$ nach $x_\varkappa$ oder $y_\varkappa$ ist $\cos \alpha_{\iota\varkappa}$ bezw. $\sin \alpha_{\iota\varkappa}$. Die mechanische Bedeutung dieser Begründung von (2) ist auch geläufig: sie zeigt, daß eine unendlich kleine Verrückung aus dem durch (2) gekennzeichneten Gleichgewichtszustand in erster Näherung bei konstantem U, d. h. **arbeitslos** erfolgt: es ist $\delta\, U = 0$.

Die Statiker pflegen als selbstverständlich anzunehmen, daß mit dem Nullsetzen der ersten Ableitungen von U schon sichergestellt sei, daß U an der betrachteten Stelle ein Minimum besitzt; wenigstens wird über die Frage, ob U wirklich einen Kleinstwert aufweist, leicht hinweggegangen. Nun zeigt es sich, daß dies im allgemeinen gar nicht zutrifft, daß man vielmehr erst durch die Untersuchung der zweiten Ableitungen von U feststellen muß, wie es sich in jedem Fall verhält. Dabei stoßen wir hier von selbst auf **die natürliche Definition der Stabilität: Stabil** heißt ein Gleichgewichtszustand, wenn **jede unendlich kleine Veränderung** des Zustandes in zweiter Annäherung **positiven Arbeitsaufwand erfordert.** Der Mathematiker sagt, die aus den zweiten Ableitungen von U als Koeffizienten gebildete quadratische Form müsse **positiv definit** sein, d. h. nur positive Werte annehmen. Erteilen wir nämlich jedem Knoten, soweit es die Auflagerbedingungen zulassen, unendlich kleine Verrückungen $\delta\, x_\varkappa$, $\delta\, y_\varkappa$, so beträgt der Arbeitsaufwand[1]) $\delta^2 U$ bis auf Glieder dritter und höherer Ordnung:

$$\delta^2 U = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}\,\delta x_1^2 + 2\,\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial y_1}\,\delta x_1\,\delta y_1 + \ldots 2\,\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial y_2}\,\delta x_1\,\delta y_2 + \ldots\right] \qquad (4).$$

Was in der Klammer steht, ist eben die erwähnte quadratische Form mit den zweiten Ableitungen von U als Koeffizienten und den $\delta\, x_1$, $\delta\, y_1$, $\delta\, x_2$, $\delta\, y_2$ . . . als Variablen. Die Bedingungen dafür, daß $\delta^2 U$ für alle Wertsysteme der $\delta\, x$, $\delta\, y$ positiv bleibt, bestehen, wie man weiß, in dem Positivsein gewisser aus den Koeffizienten gebildeter Determinanten. Man weiß aber überdies, daß die Gebiete, in denen die Form positiv definit ist, von denen, in denen sie es nicht ist, durch Stellen getrennt werden, an denen **die Determinante aus sämtlichen Koeffizienten** (eine Determinante mit $2\,k - m$ Zeilen und Spalten) **verschwindet.** Will man also nur die Stabilitäts**grenze** haben, so braucht man nur die Determinante aus den $(2\,k - m)^2$ zweiten Ableitungen von U aufzustellen und sie gleich Null zu setzen. Wir wollen gleich sehen, wie man zu dieser Stabilitätsbedingung auch auf elementarerem Weg, nämlich ohne den Begriff der quadratischen Form zu benutzen, gelangen kann.

Ich stelle vorerst ausdrücklich fest, daß in den Ueberlegungen, die zu den Gl. (1) bis (3) geführt haben, nirgends die Kleinheit der Formänderungen oder Verschiebungen eine Rolle gespielt hat. Die Differenzen $a - l$ sind für uns endliche Werte, die in (2) auftretenden Winkel α sind exakt die Winkel der Stäbe in der verzerrten Gleichgewichtslage. Nun aber betrachten wir unendlich kleine Verrückungen $\delta x, \delta y$, die aus der Gleichgewichtslage in eine unendlich benachbarte Lage überführen. Dabei verändern

[1]) Der Exponent 2 in $\delta^2 U$ weist nur darauf hin, daß die Glieder 2. Ordnung genommen werden müssen, da die 1. Ordnung $\delta\, U = 0$ geben.

sich die Längen a um δa und die Winkel α um $\delta\alpha$, und zwar gilt, wie man leicht einsieht:

$$\left.\begin{aligned} \delta a_{\iota\varkappa} &= \delta(x_\varkappa - x_\iota)\cos\alpha_{\iota\varkappa} + \delta(y_\varkappa - y_\iota)\sin\alpha_{\iota\varkappa}, \\ a_{\iota\varkappa}\,\delta\alpha_{\iota\varkappa} &= -\delta(x_\varkappa - x_\iota)\sin\alpha_{\iota\varkappa} + \delta(y_\varkappa - y_\iota)\cos\alpha_{\iota\varkappa} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Variiert man die Gl. (2) und nimmt dabei an, daß $\delta X_\varkappa = \delta Y_\varkappa = 0$, d. h. daß die äußeren Lasten an Größe und Richtung unverändert mit ihren Angriffspunkten mitgehen, so erhält man neue $2k-m$-Gleichungen:

$$\sum_\iota \left[\mp EF\frac{a-l}{l}\begin{smallmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{smallmatrix}\,\delta\alpha + \frac{EF}{l}\begin{smallmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{smallmatrix}\,\delta a\right]_{\iota\varkappa} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Hier hat man für $\delta\alpha$ und δa die Ausdrücke (5) einzusetzen und erhält damit $2k-m$ lineare, homogene Gleichungen für die $2k-m$ unabhängigen Verrückungen $\delta x, \delta y$. Die Lösbarkeitsbedingungen dieses Gleichungssystems, die in dem *Verschwinden der Koeffizienten-Determinante* zum Ausdruck kommt, ist, wie aus dem Zusammenhang von (2) mit (3) hervorgeht, nichts anderes als die gesuchte Stabilitätsbedingung. Man kann ja die Stabilitätsgrenze auch definieren als einen Gleichgewichtszustand, in dessen unmittelbarer Nähe sich wieder ein solcher befindet. Stellt man sich etwa vor, die äußeren Belastungen seien bis auf einen Zahlenfaktor λ gegeben, und dieses λ wachse allmählich von 0 an, so durchläuft man zuerst eine Reihe von Gleichgewichtszuständen, die sicher stabil sind, bis man zu einem λ-Wert kommt, der die fragliche Determinante zu Null macht. Hier »verzweigt« sich das Gleichgewicht, d. h. es gibt zunächst zwei unendlich benachbarte Gleichgewichtslagen, die später, nämlich bei größerem λ, um ein endliches Stück auseinander liegen. Es kann nicht mit Sicherheit behauptet werden, daß einer der beiden Gleichgewichtszustände, die dann bei gleicher Belastung möglich sind, unstabil ist. Sicher ist nur, daß man *vor Erreichen des kritischen λ-Wertes nur mit stabilen Zuständen zu tun hat*.

Es soll hier nicht näher auf die allgemeine Erörterung der Stabilitätsverhältnisse eingegangen werden, ebensowenig wie auf verschiedene Vereinfachungen, die bei der expliziten Aufstellung der Stabilitätsbedingung möglich sind. Besonders im Falle statisch bestimmter Fachwerke läßt sich auf einem anderen, den in der Baumechanik üblichen Gedankengängen besser angepaßtem Wege ein Satz von s Gleichungen finden, dessen Determinante ebenfalls die Stabilitätsbedingung liefert. Auf den dreidimensionalen Fall sind die Ueberlegungen ohne weiteres übertragbar. Von besonderem Interesse erscheint dabei das Ausknicken eines an sich ebenen Fachwerkes aus seiner Ebene, wie dies bei Brückenträgern beobachtet wird. Ich gehe jetzt dazu über, die Ergebnisse der Untersuchung an einigen Beispielen darzulegen.

2. Beispiele zur reinen Fachwerkknickung.

Den denkbar einfachsten Fall eines ebenen Fachwerks zeigt Abb. 2: zwei gleich lange und gleich beschaffene Stäbe, die an dem einen Ende drehbar gelagert, an dem andern ineinander gehängt und in der Symmetrielinie durch eine Last P belastet sind. Hier ist $k=3$, $s=2$, $m=4$, also die Bedingung $s=2k-m$ erfüllt. Die ganze Rechnung nach dem oben angedeuteten Verfahren wird außerordentlich einfach. Man erhält, wenn $EF/l = 1$ gesetzt wird, für die zweiten Ableitungen von U nach den Koordinaten x, y des belasteten Knotenpunktes das Schema

Abb. 2

$$\begin{vmatrix} 2-2\dfrac{l}{a}\sin^2\alpha & 0 \\ 0 & 2-2\dfrac{l}{a}\cos^2\alpha \end{vmatrix}.$$

Führt man noch den Abstand $2c$ der beiden Festpunkte durch $c = a\cos\alpha$ ein, so erscheinen die Stabilitätsbedingungen in der Form

$$\sin^2\alpha\cos\alpha < \frac{c}{l},\quad \cos^3\alpha < \frac{c}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

wobei die erste Stabilität gegen wagrechte, die zweite gegen lotrechte Störungen verbürgt. Nimmt man beispielsweise $c:l = 0{,}336$ entsprechend einem Winkel an der Spitze

im unbelasteten Zustand von rund 40^0, so wird zunächst bei einer Zusammendrückung der Stäbe von rund 10 vH wagrechte Unstabilität erreicht, die bei weiterer Vergrößerung des Winkels an der Spitze auf rund 95^0 wieder aufhört. Vorher aber hat bei einem Spitzen-Winkel von etwa 88^0 vertikale Instabilität eingesetzt. Beginnt man im unbelasteten Zustand schon mit einem genügend flachen Dreieck (oberer Winkel $> 45^0$), so gibt es kein Gebiet wagrechter Unstabilität, sondern der stabile Zustand geht unmittelbar in den vertikal-unstabilen über. An einem einfachen Versuchsmodell, in dem an Stelle der Stäbe geeignete Spiralfedern verwendet werden, könnte man die Verhältnisse in anschaulicher Weise erläutern. Die vollständige Diskussion der Gl. (7) soll an anderer Stelle mitgeteilt werden, jetzt gehe ich von dem »Schulbeispiel« der Abb. 2 gleich zu dem praktisch wichtigen Fall des **Gitterträgers** über.

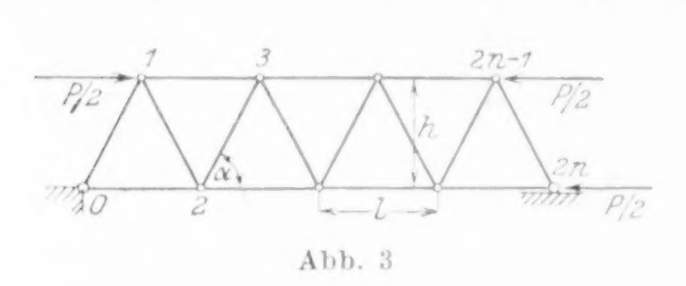


Abb. 3

Abb. 3 zeigt ein durch Aneinanderreihung von $2n-1$ gleichschenkligen kongruenten Dreiecken gebildetes Fachwerk, bestehend aus $k = 2n+1$ Knoten und $s = 4n-1$ Stäben mit $m = 3$ Auflagerbedingungen. Die beiden rechtwinkeligen Abschlußdreiecke, die in der Regel hinzugefügt werden, um den Obergurt auf die Länge des Untergurts zu bringen, habe ich fortgelassen, da sie das Ergebnis nicht wesentlich beeinflussen. Die Belastung einschließlich der Auflagerkräfte besteht aus den vier in den Gurtungen wirkenden Druckkräften von der Größe $P/2$; sie bewirkt eine elastische Verkürzung der Gurtstäbe von der natürlichen Länge l auf die Länge a, die sich praktisch außerordentlich wenig von l unterscheidet. Um die Stabilitätsbedingung zu gewinnen, genügt es, die Gl. (2) für einen oberen und einen unteren Knotenpunkt anzusetzen und das Gleichungssystem dann als Kettengleichung (Differenzengleichung) mit Randbedingungen zu behandeln. Das Ergebnis der grundsätzlich einfachen Rechnung kann man in folgende Form bringen. Wir führen eine mittlere Länge L und ein fiktives Trägheitsmoment J des ganzen Fachwerkträgers durch

$$L = (n - {}^1\!/_2)\, l \sim (n - {}^1\!/_2)\, a \quad \text{und} \quad J = 2\, F \frac{h^2}{4} \qquad (8)$$

ein, wobei F den Querschnitt des Gurtstabes, h die Trägerhöhe bezeichnet. Als maßgebend für die Stärke der Vergitterung erweist sich der Parameter

$$\varrho = \frac{E F}{E' F'} \frac{1}{2 \cos^3 \alpha} \qquad (8'),$$

wo E', F' Elastizitätszahl und Querschnitt eines Gitterstabes bedeutet. Die kritische Belastung, bei der Instabilität einsetzt, wird dann durch die Formel

$$P = \pi^2 \frac{E J}{L^2} \frac{c}{1 + c' \varrho} \qquad (9)$$

gegeben, deren Aehnlichkeit mit der **Eulerschen** unmittelbar in die Augen fällt. Die Konstanten c und c' hängen nur von n ab und sind, wenn wir gleich die Grenzwerte für wachsendes n hinzufügen, folgendermaßen bestimmt:

$$c = \left(\frac{4n-2}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n-2}\right)^2 \longrightarrow 1, \quad c' = \left(2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n-2} \cos \frac{\pi}{2n}\right)^2 \longrightarrow \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \qquad (9').$$

Die ganze Rechnung läßt sich völlig exakt, ohne jede Vernachlässigung durchführen, nur in der hier angegebenen Endformel habe ich mir eine Vereinfachung erlaubt: die im Nenner des zweiten Bruches in (9) stehende Funktion von ϱ ist nur für $n = 2$ und $n = \infty$ linear, sonst von etwas verwickelterer Form, aber numerisch niemals stark von der angegebenen verschieden. Für große n hat kürzlich **Ljungberg** auf Grund plausibler Annahmen über die Deformation des Fachwerks beim Knickvorgang einen mit (9), (9') übereinstimmenden asymptotischen Ausdruck mitgeteilt[1]). Die vollständige Diskussion der Ergebnisse verschiebe ich ebenfalls bis zur ausführlichen Veröffentlichung der ganzen Theorie und wende mich jetzt dem zweiten Grenzfall, der reinen Rahmenknickung, zu.

3. Reine Rahmenknickung, allgemeiner Ansatz. Wir betrachten wieder, und zwar jetzt wesentlich in einer Ebene, ein System von k Knotenpunkten, die durch

[1]) K. Ljungberg, Der Eisenbau 13, 1922, S. 100 bis 105.

s gerade Stäbe verbunden und m Bewegungsbeschränkungen unterworfen sind (Abb. 4). Aber die physikalischen Voraussetzungen sollen völlig verändert werden. Wir nehmen an, das System könne nur solche — mit den Auflagerbedingungen verträgliche — Lagen einnehmen, bei denen die Entfernung je zweier Knoten unverändert bleibt; die Verbindungsstäbe sollen dabei im allgemeinen nicht geradlinig bleiben, sondern in Kurven übergehen, die sich in den Knoten unter unveränderten Winkeln aneinanderschließen und im übrigen der Differentialgleichung der Biegungstheorie (für kleine Ausbiegungen) genügen. Der Zustand, von dem wir ausgehen und dessen Stabilität wir untersuchen, ist dabei keineswegs ein kräftefreier, sondern ein solcher Gleichgewichtszustand zwischen inneren und äußeren Kräften, bei dem die einzelnen Stäbe biegungsfrei, also geradlinig, sind. Natürlich darf man hier die äußeren Kräfte nicht völlig willkürlich annehmen; daß es aber tatsächlich Zustände biegungsfreien Gleichgewichtes bei jeder Stabverbindung gibt, erkennt man beispielsweise an dem Rechtwinkelrahmen der Abb. 5 und 6. Im ersten Fall sind beide Ständer mit $P/2$ axial belastet, im zweiten nur der rechte Ständer mit P, der Querstab ist beidemal spannungslos. Die allgemeine Bedingung für die Möglichkeit eines biegungsfreien Gleichgewichtes ist hier offenbar die, daß die wagrechten Komponenten der in den beiden oberen Knotenpunkten angreifenden Lasten einander aufheben. Auf den kräftefreien oder »natürlichen« Zustand greifen wir gar nicht zurück, so daß es auch gleichgültig ist, ob wir Längenänderungen, die, wie gesagt, während des Knickvorganges (d. i. beim Uebergang aus dem biegungsfreien in den schwach gebogenen Gleichgewichtszustand) ausgeschlossen sein sollen, für den Uebergang aus dem natürlichen in den zu untersuchenden biegungsfreien Zustand zulassen oder nicht. Nur müssen wir im ersteren Fall annehmen, daß die Fixierung der Rahmenwinkel erst nach Aufbringung der Belastung und Eintritt der Längenänderung erfolgt (vergl. dazu **6**).

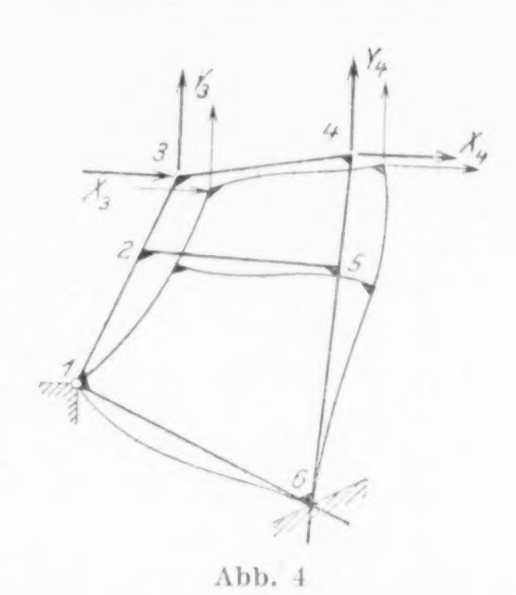


Abb. 4

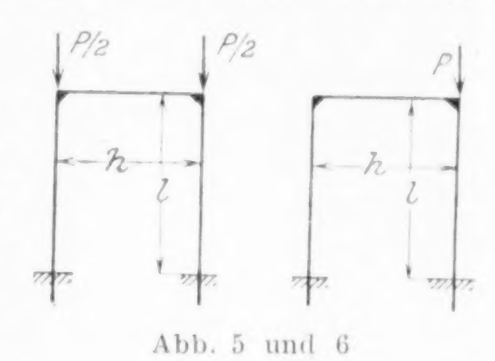


Abb. 5 und 6

Die Aufgabe, die wir uns einem Rahmentragwerk gegenüber stellen, geht dahin, die Stabilität eines gegebenen biegungsfreien Gleichgewichtszustandes zu untersuchen. Sie erscheint etwas eingeschränkter als die beim idealen Fachwerk behandelte Aufgabe, indem wir nur ausgewählte Konfigurationen und damit ausgewählte Belastungsfälle ins Auge fassen. Aber die frühere Allgemeinheit war nur eine scheinbare, da praktisch Stabilitätsgrenzen nur bei Zuständen auftreten, die in gewissem Sinne »biegungsfrei« sind — davon ein Wort noch später (**6**). Die Frage nach der Stabilitätsgrenze können wir jetzt auch so stellen, daß wir nach den Bedingungen suchen, unter denen in unendlicher Nachbarschaft des gegebenen, geradlinigen Zustandes ein Gleichgewichtszustand mit schwachen Ausbiegungen besteht. Zur Festlegung des Ausgangszustandes gehört die Angabe der in jedem einzelnen Stab wirkenden (endlichen) Stabkraft, die jetzt mit P bezeichnet und als Druck positiv gerechnet sei.

Der Biegungstheorie gerader Stäbe entlehnen wir die folgenden Tatsachen. Steht ein Stab von der Länge l und dem Querschnitt-Trägheitsmoment J (Abb. 7) unter dem Einfluß der endlichen Druckkraft P, einer unendlich kleinen Querkraft Q, einer ebensolchen achsialen Zusatzkraft S, schließlich der beiden unendlich kleinen Biegungsmomente M_a und M_b an den Enden, so genügt die Ausbiegung v als Funktion der Abszisse x der Differentialgleichung

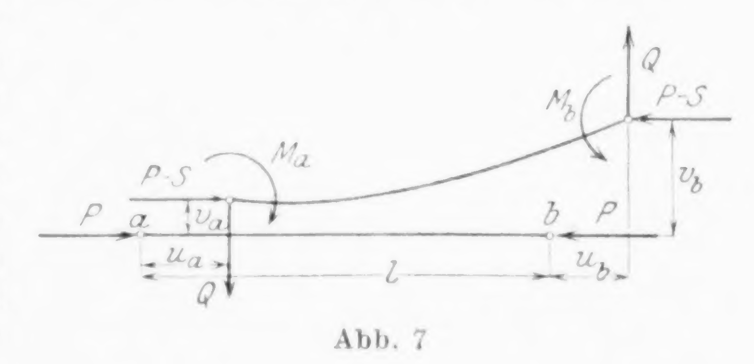


Abb. 7

$$v'' = \frac{M}{EJ} \text{ mit } M = M_a - Qx - P(v - v_a)\,.$$

Aus der zweiten Beziehung folgt zunächst, wenn man $x = l$ setzt, eine Gleichgewichtsbedingung (Momentengleichung):

$$M_a - M_b = Ql + P(v_b - v_a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

die immer erfüllt sein muß. Durch Integration unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen gewinnt man, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, die beiden Hauptgleichungen des Problems, die sich mit den Abkürzungen

$$z^2 = \frac{P.}{E\,J},\ t(z) = \frac{1 - \cos z}{z \sin z},\ s(z) = \frac{1 + \cos z}{z \sin z} - \frac{2}{z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

wie folgt schreiben lassen. Es ist

$$v'_b - v'_a = \frac{l}{E\,J}(M_a + M_b).\ t(z), \qquad 2\,\frac{v_b - v_a}{l} - (v'_b + v'_a) = \frac{l}{E\,J}(M_b - M_a).\ s(z) \quad (12).$$

In den drei Gl. (10) bis (12), die linear und homogen in den unendlich kleinen Größen $Q, M_a, M_b, v_a, v_b, v'_a, v'_b$ sind, ist alles enthalten, was wir aus der Biegungstheorie brauchen. Es sei nur noch angemerkt, daß auf der linken Seite der ersten Gl. (12) der Winkel zwischen den Endtangenten der Biegungslinie, in der zweiten Gleichung bis auf den Faktor 2, der Winkel zwischen der Verbindungssehne der Endpunkte und der »mittleren« Tangentenrichtung steht. Die Werte von $t(z)$ und $s(z)$ sind für jedes z explicite angebbar, insbesondere ist für $z = 0$, wie man leicht ausrechnet, $t(0) = {}^1/_2$, $s(0) = -{}^1/_6$.

Die Anwendung auf das Problem der Rahmenknickung ergibt sich ganz von selbst. Wir denken uns jedem Knoten, soweit es die Bewegungsbeschränkungen zulassen, unendlich kleine Verschiebungen δx, δy und eine unendlich kleine Drehung $\delta\vartheta$ erteilt. Befinden sich unter den m Bewegungsbeschränkungen m_1 Verschiebungs- und m_2 Drehhungsbedingungen, so ist die Zahl der unabhängigen Drehungsgrößen gleich $k - m_2$, die der Verrückungen zunächst $2k - m_1$. Doch vermindert sich diese letzte Zahl noch um s, da vermöge der Bedingung unveränderlicher Länge für jeden Stab $\iota\varkappa$ eine Gleichung der Form

$$(\delta x_\varkappa - \delta x_\iota) \cos \alpha_{\iota\varkappa} + (\delta y_\varkappa - \delta y_\iota) \sin \alpha_{\iota\varkappa} = 0$$

besteht. Durch die $2k - m_1 - s$ unabhängigen Verschiebungsgrößen kann man die in den Gl. (10) und (12) auftretenden v_a, v_b ausdrücken, z. B. für den Stab, der vom Knoten ι zum Knoten $\varkappa$ läuft:

$$v_a = \delta y_\iota \cos \alpha_{\iota\varkappa} - \delta x_\iota \sin \alpha_{\iota\varkappa}, \qquad v_b = \delta y_\varkappa \cos \alpha_{\iota\varkappa} - \delta x_\varkappa \sin \alpha_{\iota\varkappa}.$$

Die in (12) auftretenden v'_a, v'_b sind unmittelbar gleich den betreffenden $\delta\vartheta$. Zwischen den $2s$ Zusatzkräften Q, S bestehen an jedem freien Knotenpunkt zwei Gleichgewichtsbedingungen (hier ist die Annahme enthalten, daß die Belastungen, aber nicht die Auflagerkräfte, nach Größe und Richtung unverändert bleiben); die Gesamtzahl dieser Beziehungen ist $2k - m_1$, so daß es im ganzen $2s - 2k + m_1$ unabhängige Zusatzkraft-Größen gibt. Ebenso wird durch die Bedingung, daß an den $k - m_2$ an der Drehung nicht behinderten Knoten die Momentensumme Null sein muß, die Zahl $2s$ der Momentgrößen M_a, M_b auf $2s - k + m_2$ unabhängige herabgesetzt. Eine Zusammenfassung ergibt:

	$2k - s - m_1$	Verschiebungen
	$k - m_2$	Drehungen
	$2s - 2k + m_1$	Zusatzkräfte
	$2s - k + m_2$	Biegungsmomente
Summe:	$3s$	Veränderliche.

Schreibt man daher für jeden der s Stäbe die Momentengleichung (10) und die beiden Hauptgleichungen (12) an, drückt dabei die v_a, v_b durch $2s - k - m_1$ unabhängige Verschiebungsgrößen, die v'_a, v'_b durch $k - m_2$ Drehungsgrößen, die Q durch $2s - 2k + m_1$ Kraftgrößen, endlich die M_a, M_b durch $2s - k + m_2$ unabhängige Momente aus, so hat man ein System von $3s$ linearen, homogenen Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten, dessen Determinante gleich Null gesetzt die Stabilitätsgrenze oder Knickbedingung liefert.

Auch hier gilt die Einschränkung, daß zwar der Uebergang von stabilen zu unstabilen Gleichgewichtslagen stets durch eine Nullstelle der Knick-Determinante hindurchführt, daß aber das Ueberschreiten einer Nullstelle nicht notwendig Instabilität zur Folge hat.

4. Beispiele zur reinen Rahmenknickung. Als erstes und einfachstes Beispiel mag der symmetrische und gleichmäßig belastete Rechteckrahmen der Abb. 5 dienen. Elastizitätszahl, Länge und Querschnittsmoment für die Ständer seien E, l und J, die entsprechenden Größen für den Querstab E', h und J'. Es kommt dann ausschließlich auf den Wert des Parameters

$$\varkappa = \frac{E'\,J'}{E\,J}\,\frac{l}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

an. Die kritische Lastgrenze ist, wie die Rechnung zeigt, gegeben durch

$$P = z^2\,\frac{E\,J}{l^2},\ \text{wobei}\ z \operatorname{ctg} z = -6\varkappa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Wenn $\varkappa$ von 0 bis ∞ wächst, d. h. die Stärke des Querstabes im Verhältnis zu den Ständern die äußersten Grenzen durchläuft, nimmt z [nämlich die kleinste Wurzel der transzendenten Gl. (14)] von $\pi/2$ bis π zu. Der erstere Wert entspricht nach der Eulerschen Formel der Tragkraft zweier unverbundener Säulen, der letztere einer Biegungsform wie sie Abb. 8 andeutet, mit einem Wendepunkt in der Mitte. Zwischenfälle sind leicht zu beherrschen, wenn man einmal eine Linie mit den Ordinaten $z \operatorname{ctg} z$ zu den Abszissen z gezeichnet hat.

Weniger einfach ist das Ergebnis, wenn die Ständer ungleich stark und ungleich belastet sind. Betrachten wir zunächst den in Abb. 6 angedeuteten Fall, daß der rechte Ständer allein die ganze Last P trägt und der linke außerordentlich schwach gegenüber dem belasteten ist, so liefert die Rechnung eine ganz ähnliche Formel wie (14), nämlich

$$P = z^2 \frac{EJ}{l^2} \quad \text{mit } z \operatorname{ctg} z = -3\varkappa \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Dabei sind E, J in der ersten Gleichung und in der mit heranzuziehenden Gl. (13) die Werte für den belasteten Ständer. Nehmen wir, im Falle der einseitigen Belastung, an, der Querstab sei unendlich stark, d. h. $\varkappa = \infty$, der unbelastete Hilfsständer habe aber ein endliches Trägheitsmoment gleich λJ, so wird die kritische Last

$$P = z^2 \frac{EJ}{l^2} \quad \text{mit} \quad \frac{z^3 \sin z}{z \sin z - 2(1 - \cos z)} = 12\lambda \quad \ldots \ldots \quad (16).$$

Im Grenzfall $\lambda = 0$ hat man $z = \pi$ übereinstimmend mit (15) bei $\varkappa = \infty$, und entsprechend einer Ausbiegungsform, wie sie Abb. 8 zeigt. Wächst λ unbeschränkt, so nähert sich z dem Wert 2π, gemäß der Tragkraft einer an beiden Enden eingespannten Säule.

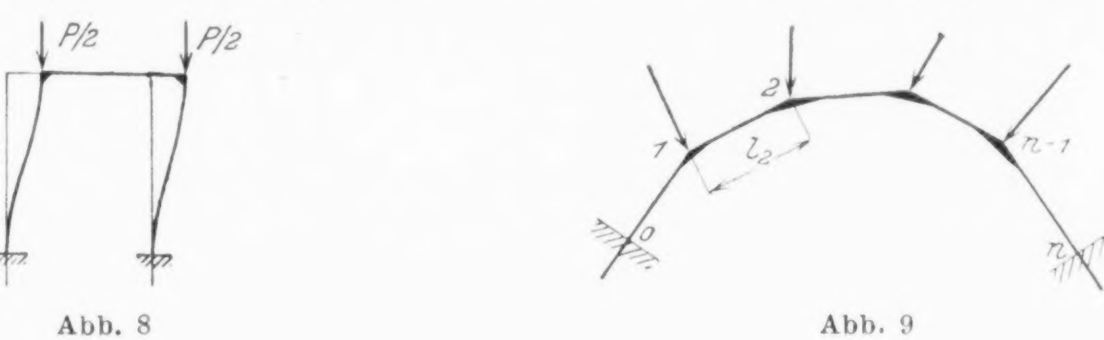


Abb. 8 Abb. 9

Die bisher betrachteten Beispiele gehören alle einer besonderen Klasse an, für die sich der allgemeine Ansatz noch etwas weiter führen läßt. Wir haben hier einfache Rahmenpolygone vom Typus der Abb. 9 vor uns, bei denen in jedem Knoten nur 2 Stäbe zusammentreffen. Damit an einem solchen Polygonzug ein biegungsfreies Gleichgewicht bestehen kann, also das Knickproblem in unserem Sinne überhaupt vorliegt, müssen die Belastungen so beschaffen sein, daß der Rahmen ein zu ihnen passendes Seileck bildet. Die Zahl der unbekannten Biegungsmomente ist hier gleich der Knotenzahl $k = s + 1$, die der unabhängigen Kraftgrößen reduziert sich auf nur 2, da die Q und S an jedem Stab die gleiche Resultierende geben müssen. Diese und andere Umstände bewirken, daß der Rechnungsgang gegenüber dem allgemeinsten Fall vereinfacht wird. Ist keine der Stabkräfte P gleich Null, so kann man aus der Momenten- und zweiten Hauptgleichung die Differenz $v_b - v_a$ eliminieren, muß aber dann noch beachten, daß die v nicht unabhängig von einander sind, sondern zufolge des Zusammenhangs des Rahmens zwei geometrische Bedingungen erfüllen. Diese Ueberlegungen finden sich zum großen Teil schon bei F. Bleich, der eine Knicktheorie für Rahmenpolygone entworfen hat, ohne, wie es scheint, in allen Punkten zu voller Klarheit durchgedrungen zu sein[1]). Geht man in der Spezialisierung noch weiter und läßt alle Stäbe und alle Lasten in eine einzige Gerade fallen, so gelangt man zu den vielfachen Problemen des in Felder gegliederten Stabes, die H. Zimmermann[2]) in zahlreichen Arbeiten, neuerdings auch J. Ratzersdorfer[3]) mit Erfolg behandelt hat.

Als Beispiel für ein geschlossenes Rahmenpolygon diene das radial belastete regelmäßige n-Eck, (Abb. 10). Hier ergibt die Rechnung für den kritischen Wert der Stabkraft

$$P = P' : \sin\frac{\pi}{n} = z^2 \frac{EJ}{l^2} \quad \text{mit} \quad \frac{z \cos z - \sin z}{z - \sin z} = \cos\frac{2\pi}{n} \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

[1]) F. Bleich, Der Eisenbau 10, 1919, S. 666 nnd 13, 1922, S. 34 f.

[2]) Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. Berlin, 1907, 1909 etc.

[3]) J. Ratzersdorfer, Der Flug, (Oesterr. Flug-Zeitschrift) 1920, H. 1 bis 4.

Für das Quadrat, $n=4$, hat man $\operatorname{tg} z = z$, entsprechend der Tragfähigkeit des einerseits eingespannten, andrerseits geführten Stabes, und der Knickvorgang weist das in Abb. 16 angedeutete Aussehen auf.

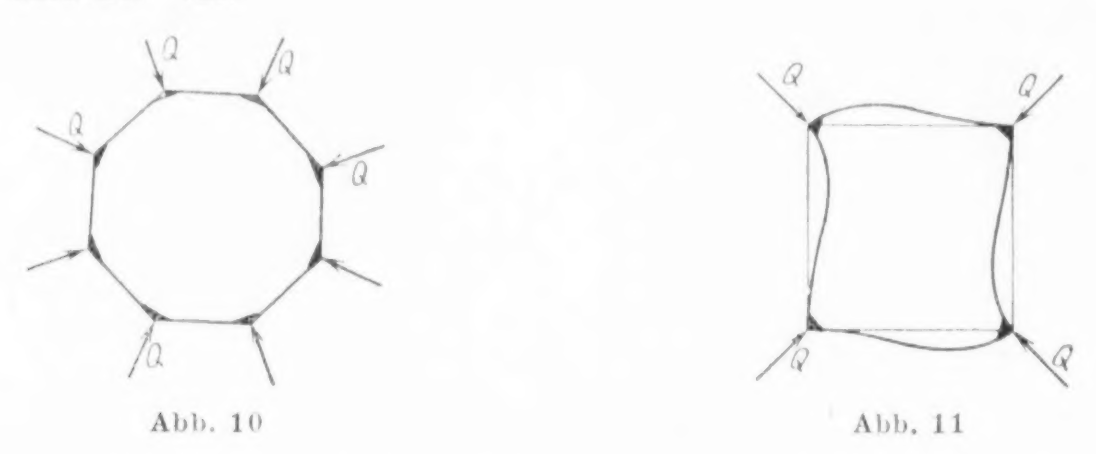


Abb. 10 Abb. 11

Ueber den Fall des einfachen Rahmenpolygons hinaus führt das von Müller-Breslau und anderen vielfach untersuchte Problem des Rahmenbalkens (Stockwerk-Rahmen, Vierendeel-Träger) (Abb. 12). Ist l die Länge eines Feldes, h die Trägerhöhe oder Entfernung der Gurte, J das Trägheitsmoment der Gurtstäbe, J' das der Querverbindungen, so kommt es hier außer auf die Felderzahl n wieder auf den in (13) definierten Parameter $\varkappa$ an. Die Druckkraft P denken wir uns zu gleichen Teilen auf Ober- und Untergurt verteilt. Dann liefert unsere Theorie für den Beiwert z^2, der P in Einheiten von EJ/l^2 ausdrückt, die Bestimmungsgleichungen

$$\cos z = \cos\vartheta + \operatorname{cotg}\frac{n}{2}\vartheta \,.\, \sin\vartheta, \qquad -3\varkappa = z \operatorname{ctg} z - \frac{z}{\sin z}\cos\vartheta \quad . \quad . \quad (18).$$

Um die Aufgabe zu beherrschen, läßt man — bei vorgegebenem n — den Parameter ϑ die Werte von π/n bis π durchlaufen und rechnet jeweils aus der ersten der beiden Gleichungen z und hierauf aus der zweiten $\varkappa$. Die so gefundenen Wertepaare $\varkappa, z$ trägt man in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und erhält damit für jedes n das gesuchte z als Funktion von $\varkappa$. Im Grenzfall verschwindend schwacher Querstäbe, $\varkappa = 0$, wird $z = \pi/n$, d. h der Rahmenstab trägt nur soviel wie die beiden Gurte in unverbun-

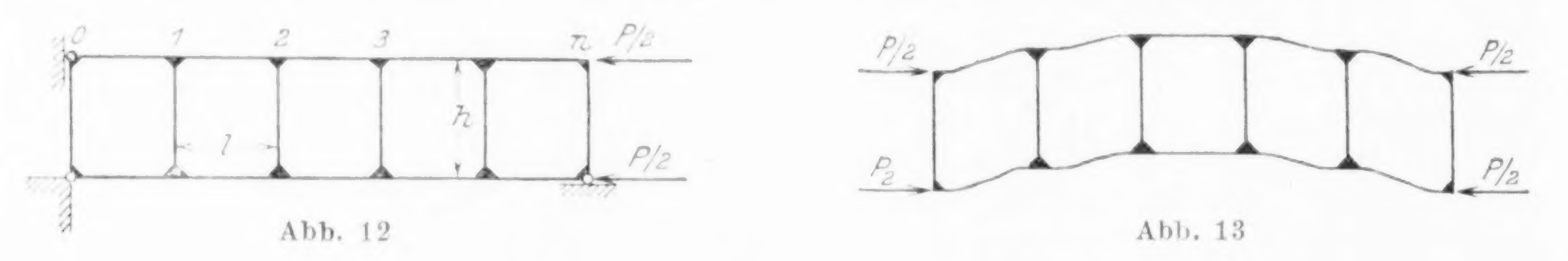


Abb. 12 Abb. 13

denem Zustand. Im entgegengesetzten Fall, $\varkappa = \infty$, hat man $z = \pi$, entsprechend einer Formänderung, wie sie Abb. 13 andeutet; hier hat jeder Gurt in der Mitte eines jeden Feldes einen Wendepunkt, an den Enden des Feldes wagrechte Tangente, zeigt aber dabei — im großen gesehen — einfache sinus-Form. Von besonderem Interesse ist der Ausdruck für die Knicklast bei sehr großem n. Führen wir die Gesamtlänge des Balkens $L = nl$ und das fiktive Trägheitsmoment $\bar{J} = 2J$ ein, so lautet der asymptotische Ausdruck

$$P = \frac{EJ}{L^2}(\pi^2 + 6n^2\varkappa) = \pi^2\frac{EJ}{L^2} + \frac{12E'J'}{hl} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Der erste Summand entspricht der Eulerschen Formel für die unverbundenen Gurte, der zweite stellt den von der Querverbindung herrührenden Zusatz dar, der durch Verkleinerung von l beliebig groß gemacht werden kann. Doch muß man überlegen, ob, wenn die Felder eng werden, der Ansatz der »reinen« Rahmenknickung, d. h. die Vernachlässigung der Dehnungen während des Knickvorganges, noch eine brauchbare Annäherung darstellt.

Sicher ist, daß der Ausdruck (19) nicht die vollständige Lösung des Problems bietet. Denn man wird erwarten dürfen, daß für große n der Rahmenbalken schließlich die Tragfähigkeit eines vollwandigen Trägers annimmt, dessen Trägheitsmoment nicht $2J$, sondern $2J + 2Fh^2/4$ ist. Nun ist es auffallend, daß die Theorie der reinen Fachwerkknickung, die eine Berücksichtigung der Längenänderungen unter Vernachlässigung der Biegungen darstellt, beim Gitterträger das fiktive Trägheitsmoment $2Fh^2/4$ ergeben

hat, während wir jetzt, bei Berücksichtigung der Biegungsteifigkeit und Vernachlässigung der Dehnungen nur den andern Bestandteil $2J$ auffinden. Demgemäß muß man vermuten, daß eine Theorie, die sowohl die Längenänderungen wie die Biegungsteifigkeit in Rechnung stellt, das vollständige Resultat liefern wird.

5. Allgemeine Stabwerkknickung. Es bedarf jetzt nur einer kleinen Ergänzung zu der oben ausgeführten Theorie der reinen Rahmenknickung. Wir fassen wieder dasselbe System von k Knoten und s Stäben ins Auge, das etwa durch Abb. 4 dargestellt war. Die physikalischen Voraussetzungen sollen nur dahin abgeändert werden, daß die Entfernung zweier Knotenpunkte, die durch einen Stab verbunden sind, nicht unveränderlich sein, sondern bei der unendlich kleinen Formänderung während des Knickvorganges der Bedingung

$$u_b - u_a = \frac{S}{EF}\, l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

genügen soll. Dabei sind u_b und u_a die in Abb. 7 angedeuteten Verschiebungskomponenten der Endpunkte eines Stabes in der Stabrichtung. Die Biegung denken wir uns der Dehnung unabhängig überlagert. Untersucht wird wieder nur die Stabilität eines biegungsfreien Gleichgewichtszustandes, wobei wir die Stabkräfte P für jeden Stab als gegeben ansehen. Die den P entsprechenden (endlichen) Längenänderungen sollen schon in der Angabe der Stablängen l berücksichtigt sein und ferner soll erst nach Eintritt dieser Längenänderungen die Fixierung der Rahmenwinkel erfolgen (vergl. **6**). Unter diesen Voraussetzungen gelingt die Aufstellung der Stabilitätsbedingung sofort, wenn wir für jeden Stab außer der Momentengleichung (10) und den beiden Hauptgleichungen (12) auch die Dehnungsgleichung (20) anschreiben. Denn die Abzählung der unabhängigen Veränderlichen, die wir oben vorgenommen haben, ändert sich nur in einem Punkt: da nicht mehr Unveränderlichkeit der Stablängen vorausgesetzt ist, sind die v_a, v_b, u_a, u_b durch $2k - m_1$ (statt $2k - s - m_1$) unabhängige Verschiebungsgrößen ausdrückbar. Wir haben somit $4s$ Gleichungen mit $4s$ Variablen, und deren Koeffizienten-Determinante gleich Null gesetzt, liefert die Knickbedingung.

Wird ein oder der andere Stab als undehnbar betrachtet, so hat man für ihn EF unendlich zu setzen oder, was auf dasselbe hinauskommt, $u_b - u_a = 0$ zu nehmen und die betreffende Dehnungsgleichung (20) wegzulassen. Ist ein Stab an einen Knoten gelenkig angeschlossen, so fallen für ihn die drei Gl. (10) und (12) fort, dafür scheiden Q, M_a, M_b als Veränderliche aus. Daß auch die beiden v' wegfallen, vermindert nicht die Zahl der Variablen, solange jeder Knoten wenigstens zwei biegungssteife Anschlüsse besizt. Ist das nicht mehr der Fall, so entspricht das Ausscheiden des $\delta\vartheta$ dem Umstand, daß das letzte M an jedem Knoten nicht zu den unabhängigen Veränderlichen gehört. Bei ausnahmslos gelenkigen Verbindungen kommt man auf diese Weise zu dem Ansatz der reinen Fachwerkknickung zurück.

Zwei Beispiele mögen genügen, um die Ergebnisse der Untersuchung der allgemeinen Stabwerkknickung zu erläutern. Nehmen wir wieder den symmetrischen und symmetrisch belasteten Rechteckrahmen der Abb. 5, so müssen wir, wie die Rechnung ergibt, jetzt außer dem schon früher verwendeten Parameter $\varkappa$ (Gl. (13)), der das Stärkeverhältnis zwischen den Ständern und dem Querstab zum Ausdruck bringt, noch einen weiteren einführen:

$$\varrho = J : F\,\frac{h^2}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21),$$

d. i. also das Verhältnis des Ständer-Trägheitsmomentes J zu dem durch die Vereinigung der beiden Ständer entstehenden Zusatzglied $Fh^2/4$. Für die Belastung an der Stabilitätsgrenze liefert die Rechnung

$$P = z^2\,\frac{EJ}{l^2} \quad \text{mit} \quad z \operatorname{ctg} z = -\frac{6\varkappa}{1 + 6\varkappa\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Mit $\varrho = 0$ geht dies in die frühere Gl. (14) über und man ersieht daraus, daß der Ansatz der reinen Rahmenknickung mit Annäherung dann zutrifft, wenn Fh^2 groß gegen J, also der Abstand der Ständer groß gegen ihre Querschnittsabmessungen ist.

Von größerem Interesse ist das Problem des Rahmenbalkens mit n Feldern (Abb. 12). Die Knicklast hängt, abgesehen von der Felderzahl n, wieder von den beiden Parametern $\varkappa$ und ϱ ab, Gl. (13) und (21), wobei die Größen in (21) sich natürlich auf die Gurtstäbe beziehen. Führen wir jetzt als fiktives Trägheitsmoment, entsprechend den

oben gemachten Andeutungen $\bar{J} = 2J(1 + 1/\varrho) = 2J + 2Fh^2/4$ ein, so erhält man zunächst für sehr starke Querverbindungen, $\varkappa = \infty$, die Knicklast zu

$$P = z^2 \frac{2\,EJ}{l^2} \quad \text{mit} \quad \frac{\sin z}{z} \frac{1 - \cos \pi/n}{\cos \pi/n - \cos z} = \varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

und bei beliebigem $\varkappa$ asymptotisch für großes n:

$$P = \pi^2 \frac{E\bar{J}}{L^2} \left[1 - \frac{\pi^2}{12\,n^2 \varrho} - \frac{\pi^2}{6\,n^2 \varkappa \varrho} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Der Ausdruck (23) liefert bei $\varrho = 0$, wie man sieht, $z = \pi$, entsprechend dem in **Abb.** 13 skizzierten Fall der reinen Rahmenknickung bei sehr starken Querstäben. Mit wachsendem ϱ sinkt z, trotzdem wächst die auf $E\bar{J}/l^2$ bezogene Knickkraft, da $2J = \bar{J} \cdot \varrho/(1 + \varrho)$. Der asymptotische Ausdruck (24) gilt nur unter der Voraussetzung, daß mit wachsendem n sowohl $n^2\varrho$ wie $n^2\varkappa\varrho$ endlich bleibt oder ins Unendliche wächst (aber nicht für $\varrho = 0$ oder $\varkappa\varrho = 0$). Behält man nur das erste Glied von (24), so hat man die Eulersche Formel für den Vollwandträger, bezogen auf $\bar{J}$. Das erste Zusatzglied gibt die Abminderung, die auch bei unendlich starken Querstäben infolge der Weitmaschigkeit des Netzes (ϱ klein bei großem n^2) zur Geltung kommt, das letzte Glied die Abminderung infolge der Nachgiebigkeit der Querverbindung. Die vollständige Diskussion der Lösung, die viel Sorgfalt erfordert, muß der ausführlicheren Veröffentlichung vorbehalten bleiben. Von dem Müller-Breslauschen Resultat[1]), das auf dem Wege über eine Reihe mehr oder weniger willkürlicher Annahmen gewonnen wird, weicht das unsere einigermaßen ab. Besser stimmt es mit einer Untersuchung von L. Mann überein[2]), der allerdings eine etwas andere Biegungstheorie (sog. Berücksichtigung der Schubspannungen!) zugrundelegt. Als einen gewissen Vorzug gegenüber allen bisherigen Knickberechnungen wird man wohl die Allgemeinheit und Zwangläufigkeit des hier vorgetragenen Gedankenganges anführen dürfen.

Einer Erweiterungsmöglichkeit der Theorie, die keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bietet, sei noch kurz Erwähnung getan. Statt nur die Grenzfälle völlig nachgiebiger oder völlig steifer Eckverbindungen in Betracht zu ziehen, kann man auch »elastische« Anschlüsse zulassen, indem man eine Verdrehung des Stabendes gegen den Knotenkörper proportial dem Biegungsmoment M_a bezw. M_b ansetzt. In den Hauptgleichungen (12) sind alsdann nur die betr. v_a' oder v_b' durch Multipla der M_a bzw. M_b zu ersetzen. In gleicher Weise können auch elastische Verschiebungen in den Knoten behandelt und schließlich — in beiden Richtungen — elastische Auflager-Bedingungen eingeführt werden.

Welchen Ansatz man einem bestimmten praktischen Fall gegenüber wählt, das kann nicht allgemein im voraus entschieden werden. Selbstverständlich läßt sich der Rahmenbalken nicht als Fachwerk rechnen — er hätte dann gar keine Tragkraft. Nimmt man umgekehrt den Gitterträger als reines Rahmentragwerk an, d. h. ohne die Dehnbarkeit der Stäbe zu berücksichtigen, so können die Knoten keine gegenseitigen Verrückungen erleiden und die Knickgrenze wäre erst erreicht, wenn der einzelne Gurtstab ausknickt. Die vollständige Stabwerktheorie ist natürlich immer anwendbar, wobei man im Falle des Gitterträgers zunächst noch die Gitterstäbe als gelenkig eingehängt betrachten kann. In der Regel wird, an der vollständigen Theorie gemessen, die Tragkraft unterschätzt, wenn man als Fachwerk, überschätzt, wenn man als reinen Rahmen rechnet.

6. Exzentrische Belastung, Anfangsbiegung. Ein kurzes Wort noch über das Verhältnis der Stabilitätstheorie zum allgemeinen Problem der Spannungsermittlung! Darüber herrscht viel Unklarheit in der technischen Literatur, auch dort, wo es sich um längst erledigte Stabilitätsfragen handelt, wie bei der Knickung des Vollwandträgers u. ähnl. Unser allgemeiner Ansatz läßt alle diese Verhältnisse durchsichtiger erscheinen.

Die Theorie der reinen Fachwerkknickung ist naturgemäß auf jeden Gleichgewichtszustand eines idealen Fachwerks anwendbar. Soll sie zu richtigen und widerspruchsfreien Ergebnissen führen, so muß man darauf sehen, daß der der Betrachtung zugrunde gelegte Zustand wirklich ein Gleichgewichtszustand ist, d. h. daß für ihn die Gl. (2) genau erfüllt sind. Wird beispielsweise der Gitterträger der Abb. 3 in den beiden Gurten

[1]) H. Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 4. Aufl., S. 398, 400. Leipzig 1913.

[2]) L. Mann, Zeitschrift für Bauwesen, 59, 1909, S. 539 bis 568.

ungleich belastet, etwa im Obergurt mit $P_1 < P/2$, im Untergurt mit $P_2 > P/2$, so führt die übliche Art der Spannungsermittlung zu der Behauptung, alle Stäbe des Obergurtes hätten die Stabkraft $-P_1$, die des Untergurtes $-P_2$, während die Gitterstäbe spannungslos seien. Bestimmt man dann — ebenfalls nach den üblichen Methoden — die Formänderung des Fachwerks, so erhält man als Resultat ein Bild, wie es übertrieben Abb. 14 andeutet; denn wenn die Gurte geradlinig blieben, könnten die Gitterstäbe, infolge der ungleichen Längenänderungen im Ober- und Untergurt, nicht ohne Dehnung, also auch nicht spannungslos sein. Nun besteht aber für ein Fachwerk, das die Gestalt der Abb. 14 besitzt, kein Gleichgewicht bei spannungslosen Gitterstäben und konstanten Spannungen im Ober- und Untergurt. Die Gl. (2), in denen die α die Stabwinkel *nach* der Deformation bedeuten, sind jetzt nicht erfüllt. Man könnte versuchen, zu einer Lösung der Gl. (2) etwa in der Weise zu gelangen, daß man die Spannungsermittlung unter Zugrundelegung des erstmals berechneten Verzerrungszustandes wiederholt, aus den neuen Spannungen wieder die Verzerrungen rechnet usf. Es mag dahingestellt bleiben, ob dieser Weg immer zum Ziele führt, und auch, ob ein Bedürfnis nach einer derartig genauen Auflösung der Gl. (2) überhaupt besteht. In der Regel wird es genügen, in folgender Weise vorzugehen.

Abb. 14

Man setze die Verrückungen, die die einzelnen Knotenpunkte in Abb. 14 gegenüber dem Zustande geradliniger Zusammenziehung der beiden Gurte erfahren, als *kleine* Größen voraus, und drücke demgemäß, indem man die Spannungsermittlung für den verzerrten Zustand ausführt, die zusätzlichen Stabkräfte (die zu dem Spannungssystem $-P_1$ oben, $-P_2$ unten, 0 in den Diagonalen hinzutreten) *linear* und *homogen* durch diese Verrückungen aus. Die Längenänderungen aller Stäbe gegenüber dem den Stabkräften $-P_1$, $-P_2$, 0 entsprechenden Zustand sind auch linear, aber *nicht homogen* durch die Verrückungen darstellbar; denn wenn alle jetzt betrachteten zusätzlichen Verschiebungen null sind, haben doch die Gitterstäbe nicht ihre natürliche Länge. Setzt man nun für jeden Stab die Gl. (1) an, so hat man ein System von $s = 2k - m$ *linearen, nicht homogenen* Gleichungen für die $2k - m$ Verrückungen. Ist die Determinante dieses Gleichungssystems nahe Null, so erhält man sehr große Werte für die Verrückungen im Widerspruch mit der Voraussetzung, daß die Verrückungen klein seien; man muß also schließen, daß dann ein Gleichgewichtszustand mit kleinen Ausbiegungen des Trägers nicht vorhanden ist. Von wesentlich praktischem Interesse wird die Frage sein, wann dieser kritische Fall eintritt, d. h. wann die Determinante des Gleichungssystems sich der Null nähert. Nun braucht man, wenn es sich um eine Gleichungsdeterminante handelt, die absoluten Glieder der Gleichungen gar nicht zu kennen bezw. nicht in Rechnung zu stellen. In unserem Fall sind das gerade *die* Längenänderungen der Gitterstäbe, die bei Wegfall jeder Ausbiegung nur durch die ungleichen Verkürzungen des Ober- und Untergurtes entstehen. Lassen wir diese Glieder fort, so bedeutet das soviel, wie die Annahme, daß die Gitterstäbe erst *nach* der Aufbringung der Belastung und *nach* Eintritt der Gurtverkürzungen (spannungslos) montiert sein sollen. Das derart homogen gemachte Gleichungssystem ist aber kein anderes als das System (3) für den Gleichgewichtszustand eines Fachwerks, das sich von dem ursprünglich gegebenen in der natürlichen Länge der Gitterstäbe unterscheidet; der Zustand weist geradlinig verkürzten Ober- und Untergurt mit den Stabkräften $-P_1$, $-P_2$ und spannungslose Gitterstäbe auf. Die Stabilitätsbedingung für diesen Gleichgewichtszustand gibt die Nullstellen der Determinante, also die kritischen Belastungswerte, bei denen das wirklich gegebene Fachwerk kein Gleichgewicht mit kleinen Verrückungen der Knotenpunkte besitzt. Wir fassen das Ergebnis unserer Ueberlegungen in folgenden Satz zusammen, wobei wir uns der Einfachheit halber auf statisch bestimmte Fälle beschränken.

Ist die Belastung eines Fachwerks so beschaffen, daß die in üblicher Weise (aus der Konfiguration der natürlichen Längen) *berechneten Stabkräfte kein Gleichgewichtssystem mehr bilden, sobald man die aus den berechneten Stabkräften folgenden Verzerrungen berücksichtigt, so kann es vorkommen, daß für gewisse Werte der Belastung die Formänderungen außerordentlich stark wachsen; nimmt man alle Verzerrungen von vornherein als klein an und macht den Ansatz demgemäß linear, so ergibt er für diese kritischen Belastungswerte keine endliche Lösung; die kritischen Last-*

werte sind dabei identisch mit der Stabilitätsgrenze für einen Gleichgewichtszustand, den man mit den ursprünglich berechneten Stabkräften dadurch bildet, daß man die natürlichen Stablängen des gegebenen Fachwerkes passend abändert.

In jedem konkreten Falle gibt es verschiedene Möglichkeiten, den Gleichgewichtszustand zu definieren, dessen Stabilitätsgrenze die kritischen Belastungen für das gegebene Fachwerk liefert. Bei dem mit P_1 und P_2 belasteten Gitterträger kann man entweder, wie oben, annehmen, die Längen der Gitterstäbe seien erst nach der Verkürzung der Gurte festgestellt worden, oder die Gurtstäbe hätten vor Aufbringen der Belastung oben und unten verschiedene Längen gehabt. Das Resultat muß bei beiden Annahmen mit der Annäherung übereinstimmen, mit der die elastischen Dehnungen den ursprünglichen Längen gegenüber vernachlässigt werden können.

Außer der Kenntnis der kritischen Belastungswerte wird mitunter auch die genauere Spannungsermittlung, unter Berücksichtigung der Formänderungen, gefordert werden [1]. Sie wird geleistet durch die Auflösung des oben angegebenen nicht-homogenen linearen Gleichungssystems, dessen Determinante gleich Null gesetzt, die kritischen Werte liefert; die Gleichungen selbst sind wesentlich unsere Gl. (3), nur daß beim Einsetzen der δa auf die absoluten, von den δx, δy unabhängigen Glieder zu achten ist. Die ganze Rechnung entspricht im Falle des Vollwandträgers der üblichen Berechnung »auf exzentrischen Druck« unter Benutzung der linearen Biegungsgleichung. Die vollständige Lösung des Gleichungssystems (2), wie wir sie zuerst andeuteten, würde der Benutzung der genauen Differentialgleichung der Biegung entsprechen. Daß der Näherungsweg in der Regel ausreichende Ergebnisse liefert, liegt daran, daß man es mit Materialien von großer Elastizitätszahl E zu tun hat, bei denen unter normalen Verhältnissen zu endlichen Kräften sehr kleine Formänderungen gehören.

Auf Rahmentragwerke sind die vorstehenden Ueberlegungen sinngemäß zu übertragen. Dabei beschränken wir uns nach wie vor auf Belastungen, die in gewissem Sinn biegungsfreien Gleichgewichtszuständen entsprechen. Ein Beispiel hierzu ist der oben in **4** besprochene Rechteckrahmen mit einseitiger Belastung, Abb. 6. Wir können gleich den allgemeinen Satz formulieren:

Ist ein Rahmentragwerk derart belastet, daß ein biegungsfreier Gleichgewichtszustand dann und nur dann möglich ist, wenn von den Längenänderungen der Stäbe abgesehen wird, so tritt ein Gleichgewicht mit Ausbiegungen ein und diese können bei bestimmten Belastungswerten außerordentlich stark wachsen; die kritischen Belastungen sind identisch mit der Stabilitätsgrenze für den biegungsfreien Zustand, den man durch Außerachtlassung der Längenänderungen erhält. Bei den Vernachlässigungen, von denen hier die Rede ist, handelt es sich, anders als in **3**, um die Dehnungen oder Verkürzungen, welche von den ursprünglich berechneten, endlichen Stabkräften herrühren und nicht um die beim Knickvorgang auftretenden, verschwindend kleinen Längenänderungen. Daß man praktisch mit dem ausgesprochenen Satz etwas anfangen kann, liegt wieder nur an der in der Regel bedeutenden Größe der Elastizitätszahl E.

7. Die sog. Eindeutigkeit des elastischen Gleichgewichtes. G. Kirchhoff hat im Jahre 1859 einen seither in alle Darstellungen der Elastizitätstheorie übergegangenen Satz aufgestellt, den er selbst in Kürze dahin ausspricht: »Das Gleichgewichtsproblem (des elastischen Körpers) hat nur eine Lösung.« [2]). Gemeint ist, daß unter der Voraussetzung sog. »kleiner« Formänderungen ein einfach zusammenhängender elastischer Körper sich nur in einem bestimmten Spannungs- und Zerrungszustand im Gleichgewicht befinden kann. Gewiß war es weder Kirchhoff noch seinen Nachfolgern unbekannt, daß in dem schon von Euler behandelten Fall der auf Druck beanspruchten Säule bei genügender Größe der Last zwei verschiedene Gleichgewichtszustände nebeneinander bestehen, der der biegungsfreien Zusammendrückung und der der sinusförmigen Ausbiegung. Um den Widerspruch zu beseitigen, pflegt man zweierlei auszuführen, zunächst, daß der zweite Gleichgewichtszustand der Säule »endliche« Verschiebungen aufweise, gegenüber den »unendlich kleinen«, welche die Elastizitätstheorie voraussetzt. Dazu ist zu sagen, daß, wenn die Belastung der Säule den Wert der Eulerschen Knick-

[1]) Vergl. H. Müller-Breslau, Der Bauingenieur, 4, 1923, S. 2 bis 9.

[2]) G. Kirchhoff, Vorles. üb. mathem. Physik, Mechanik. 3. Aufl. Leipzig 1883 S. 388.

last eben erst überschreitet, der ausgebogene Zustand beliebig nahe dem bloß gedrückten liegt; die Verrückungen in diesem Zustand sind aber gerade die, mit denen man in der Elastizitätstheorie zu rechnen hat. Die zweite Erklärung geht dahin, daß die von Euler betrachtete schlanke Säule nach den beiden Dimensionen ihres Querschnittes »verschwindend kleine« Abmessungen besitze, während sich der Kirchhoffsche Satz nur auf Körper beziehe, deren Abmessungen nach allen Richtungen von gleicher Größenordnung seien. Allein der Begriff der Größenordnung ist hier kaum anwendbar und man muß sich fragen, wie eine präzise Behauptung — die Lösung sei eindeutig — von den stetig veränderlichen Abmessungsverhältnissen abhängen könne. Ein Fachwerknetz, wie es Abb. 15 andeutet, hätte nach dem Kirchhoffschen Satz bei gegebenen Druckkräften nur eine Gleichgewichtsform, während der Gitterträger, Abb. 3, d. i. eine einfache Reihe von Dreiecken der gleichen Art, wohl als Körper mit einer verschwindend kleinen Abmessung anzusehen wäre? (Daß das Fachwerk kein einfach zusammenhängender Körper ist, spielt, wie wir gleich sehen werden, keine Rolle.) Man wird vermuten, daß eine Form des Kirchhoffschen Satzes sich finden lassen müsse, die in einwandfreier Weise dem Fall der Eulerschen Knicklast und andern Fällen von Stabilitätswechsel gerecht wird.

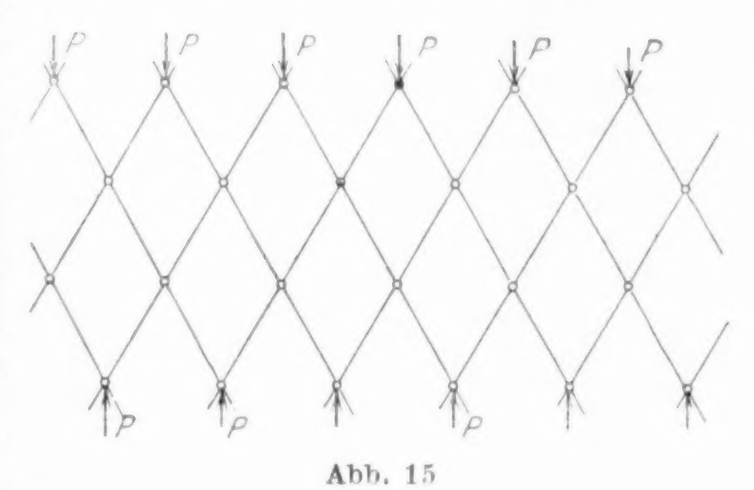


Abb. 15

Der Ansatz, den wir oben für die Stabilitätsuntersuchung am idealen Fachwerk eingeführt haben, gestattet uns, nach einer kleinen Umdeutung, weit über das ursprüngliche Anwendungsgebiet hinaus, zu entscheidenden Schlüssen für beliebig elastische Körper (elastische Kontima) zu gelangen. Aendern wir nämlich die Vorstellung dahin ab, daß wir statt von einem Fachwerk mit idealen Gelenken einfach von einem elastischen Punkthaufen sprechen, von einem System, bestehend aus k Punkten, zwischen denen Anziehungs- und Abstoßungskräfte proportional den Abstandsänderungen gegenüber der Ausgangslage wirken! Um ein bestimmtes Bild vor uns zu haben, können wir etwa die Punkte in der Anordnung eines regelmäßigen Gitters, wie es Abb. 15 zeigt, annehmen; die Verbindungslinien zwischen den Punkten bedeuten dabei keine materiellen Stabverbindungen mehr, sondern geben nur die Wirkungslinien der elastischen Kräfte an. Denken wir uns in dem Ausdruck (3) für EF eine ein für allemal bestimmte Konstante eingesetzt, so stellt U auch für unser Punktsystem den richtigen Wert der potentiellen Energie dar, wofern wir unter l den ursprünglichen (»natürlichen«) Abstand der Punkte, unter a den Abstand in der eben betrachteten Gleichgewichtslage verstehen. Die Gl. (2) bilden dann die expliziten Gleichgewichtsbedingungen und die Determinante der Gl. (6) liefert die Stabilitätsbedingung für den elastischen Punkthaufen. Die Behauptung von der Eindeutigkeit des Gleichgewichtsproblems läuft darauf hinaus, daß es bei gegebenen Kräften X, Y für die Entfernungen a und Winkel α nur ein Wertsystem geben soll, das die Gl. (2) befriedigt. Es ist klar, daß dies sicher dann nicht mehr zutrifft, wenn für ein Wertsystem a, α die Gl. (6) eine nicht verschwindende Lösung besitzen; denn das Vorhandensein einer solchen Lösung besagt ja, wie aus der Ableitung von (6) hervorgeht, daß in unmittelbarer Nähe des betreffenden Wertsystems a, α ein zweites die Gl. (2) befriedigendes Wertsystem vorhanden ist. Da sich nun in den Beispielen von **2** tatsächlich gezeigt hat, daß für bestimmte Belastungsfälle die Determinante der Gl. (6) verschwindet, so ist — zunächst für den aus endlich viel Punkten bestehenden elastischen Punkthaufen — der Eindeutigkeitssatz widerlegt.

Wir wollen nun sehen, wie sich der Gedankengang des Kirchhoffschen Beweises auf unseren Fall endlich vieler Punkte überträgt. Der Beweis benutzt in doppelter Weise die Tatsache, daß die elastischen Verschiebungen klein, also die $a-l$ klein gegen l seien. Erstens werden, wenn wir die Uebertragung gleich vornehmen, für die Winkel α in (2) ohne weiteres die Werte eingesetzt, die den Neigungen der Verbindungsgeraden zwischen den Punkten vor der Verzerrung durch die Kräfte X, Y entsprechen. Zweitens werden die Längenänderungen $a-l$ durch die $2k-m$ Verschiebungskomponenten der Punkte, unter Vernachlässigung aller Glieder höherer Ordnung, linear und homogen ausgedrückt. (Auch die Ersetzung der richtigen α durch ihre Werte vor der Formänderung bedeutet nur eine folgerichtige Vernachlässigung ebensolcher Glieder). Nach dieser Ver-

einfachung stellt (2) ein System linearer, nicht homogener Gleichungen dar, dessen Lösung, wenn sie für beliebige X, Y überhaupt möglich ist, gewiß eindeutig sein muß. Unmöglichkeit der allgemeinen Lösung besteht nur in dem sog. »Ausnahmefall« der Fachwerktheorie, der in keinem der Beispiele von **2** vorliegt und den wir mit Sicherheit ausschließen, wenn wir ein regelmäßiges Punktgitter wie Abb. 15 voraussetzen. Also haben die Gl. (2) immer eine und nur eine Lösung! Bei Kirchhoff sieht die Sache nur deshalb etwas anders aus, weil im Falle des Kontinuums die linear gemachten Gleichgewichtsbedingungen ein System linearer partieller Differentialgleichungen für die Verschiebungskomponenten bilden. Von allem nebensächlichen Beiwerk entkleidet, liegt folgender Fehlschluß vor uns. Es wird bewiesen: Wenn man die Gleichgewichtsbedingungen durch Vernachlässigung höherer Potenzen der Verschiebungen zu linearen Gleichungen macht, so haben diese immer eine und nur eine Lösung. Das aber, was zu beweisen wäre, wenn man die »Eindeutigkeit des elastischen Gleichgewichtsproblemes« mit Recht behaupten wollte, ist: Wenn man die Gleichgewichtsbedingungen in der genannten Weise zu linearen Gleichungen macht, so geht dabei keine Lösung der ursprünglich nicht linearen Gleichungen verloren. Daß dieser Beweis sich nicht erbringen läßt, geht aus den Beispielen, in denen das Vorhandensein einer Stabilitätsgrenze sich gezeigt hat, hervor. Im übrigen ist die Behandlungsweise, die Kirchhoff den elastischen Gleichgewichtsbedingungen zuteil werden läßt, inhaltlich übereinstimmend mit dem, was man — völlig mit Recht — bei der üblichen Fachwerkberechnung immer tut, wobei man ja auch zu einer eindeutigen Lösung des Spannungsproblems gelangt. Aber so berechtigt das Vorgehen an seinem Platze auch ist, darf man nicht Schlüsse daraus ziehen, für die seine Grundlagen nicht ausreichen.

Fragen wir uns nun, welches der offenbar vorhandene richtige Kern in dem Kirchhoffschen Satz ist und suchen wir eine widerspruchsfreie Aussage über Ein- oder Mehrdeutigkeit des Gleichgewichtsproblems zu finden, so müssen wir vor allem auf unbestimmte Näherungsbegriffe wie »kleine« Verschiebungen, »große« Elastizitätszahlen, verzichten. Zunächst erkennt man, daß der »natürliche« oder kräftefreie Gleichgewichtszustand unseres Punkthaufens ein stabiler Zustand ist. Denn wenn alle X, Y verschwinden, kann U nach (3) niemals negativ werden, also stellt der Wert $U = 0$, den das Potential für $a = l$ erreicht, wirklich ein Minimum dar. Nun wissen wir weiter, daß unstabile Zustände von stabilen immer durch Nullstellen der Determinante von (6) getrennt werden. Denken wir uns, wie schon am Schluß von **1** angedeutet, die äußeren Belastungen X, Y bis auf einen gemeinsamen Multiplikator λ gegeben und dieses λ alle positiven und negativen Werte durchlaufend. Setzen wir die Knickgleichung an, d. h. die Determinante von (6) gleich Null, so enthält diese Gleichung den Parameter λ, weil die $a - l$, die in (6) auftreten, ebenso wie die a, von den äußeren Kräften abhängen. Diese Gleichung wird nun für $\lambda = 0$ nicht erfüllt: das ist der Hauptteil dessen, was an dem Kirchhoffschen Satz überhaupt zu retten ist. Wäre $\lambda = 0$ eine Wurzel der Knickgleichung, so könnte nicht das Potential U, was eben festgestellt wurde, an dieser Stelle ein wirkliches Minimum besitzen. Wir können nun weiter schließen: Wenn die Gleichung mit $\lambda = 0$ nicht erfüllt wird, so gibt es eine Wurzel λ_0 vom kleinsten absoluten Betrag und für alle λ-Werte, die kleiner als λ_0 sind, ist das Gleichgewicht stabil. So gelangen wir zu folgendem Ergebnis, das den richtigen Teil der Kirchhoffschen Aussage einschließt und gleichzeitig der Möglichkeit des Stabilitätswechsels, der Verzweigungsstellen, Rechnung trägt.

Sind die Belastungen, die an dem elastischen Punktsystem angreifen, nur bis auf einen Zahlenfaktor λ gegeben, so gibt es einen von Null verschiedenen Betrag λ_0 (der auch ∞ sein kann), so daß für alle λ-Werte, die absolut genommen kleiner als λ_0 sind, eindeutige, stabile Gleichgewichtslagen bestehen, die sich, wenn λ gegen Null geht, stetig an den natürlichen Zustand anschließen; für λ-Werte, die über λ_0 liegen, kann das Gleichgewichtsproblem mehrere Lösungen besitzen.

Es ist anschaulich klar, daß der Wert der kritischen Grenze λ_0 von der Gestalt des Körpers, der Art der Belastung und der Größe der Elastizitätszahl in der Weis abhängen wird, daß schlankeren Körpern und größerer Härte kleinere λ_0 entsprechen usf. Bedenkt man, daß die in der Natur vorkommenden Stoffe alle nur begrenzt elastisch sind, d. h. bei Anwachsen der Spannungen in den Fließzustand geraten oder zu Bruch gehen, so versteht man, wie es möglich war, den Eindeutigkeitssatz für Körper von »allseits gleichen Dimensionen« und »großer« Elastizitätszahl für wahr anzunehmen. Unsere ver-

vollständigte Formulierung hat denn auch weniger praktische Folgerungen als begriffliche Klärung zum Ziele.

Die letzten Betrachtungen waren an ein mechanisches System angeknüpft worden, das aus einer endlichen Anzahl in elastischer Wechselwirkung befindlicher Punkte besteht. Es bleibt noch übrig, zu zeigen, daß die von uns gezogenen Schlüsse auch für beliebige, kontinuierlich ausgedehnte elastische Körper Geltung behalten. Nun kann man zunächst, wenn wir, wie bisher, von einem Dreiecksnetz (im Raum Tetraëdernetz) nach Abb. 15 ausgehen, die Maschenweite des Gitters mehr und mehr verkleinern, dabei die Punktezahl k entsprechend vergrößern. Geht man zur Grenze über, so nimmt der erste, elastische Teil des Potentials U die Form eines über den ganzen Körper erstreckten Raumintegrals an und aus dem einfachen Minimumproblem, das die Gleichgewichtsbedingungen lieferte, wird ein Variationsproblem. Die Gl. (2) werden zu Differentialgleichungen und die Gl. (16) entsprechen der zweiten Variation des Integrals U. Es kann hier dahingestellt bleiben, ob man auf diesem Wege, d. h. ohne Einführung anderer Kräfte als der in den Verbindungsgeraden der Einzelpunkte wirkenden, wirklich zu den Ansätzen gelangt, die man für die Untersuchung elastischer Körper zu verwenden pflegt. Sicher ist, daß die für unsere Schlußfolgerungen entscheidenden Eigenschaften von U: bei Abwesenheit von äußeren Kräften nur positiver Werte fähig zu sein und dabei den Charakter einer positiven quadratischen Form aufzuweisen — bei jeder Art von Ansatz für einfach zusammenhängende elastische Kontinua vorhanden sein müssen. Man weiß auch heute, daß der Uebergang vom algebraischen Problem mit endlich vielen Veränderlichen zu dem transzendenten mit unendlich vielen Freiheitsgraden in aller Strenge ausgeführt werden kann und bei Beschränkung auf die physikalisch zulässige Allgemeinheit zu den erwarteten Ergebnissen führt. Wenn wir oben in unseren Beispielen des Gitterträgers und Rahmenbalkens gesehen haben, wie unsere Stabilitätsbedingung bei dichter werdendem Maschennetz in die Eulersche Formel übergeht, so äußert sich darin nur eine, im ganzen Verlauf der Rechnung zu verfolgende, besondere Durchführung eines derartigen Grenzüberganges. Wir dürfen somit schließen: Der oben für das elastische Punktsystem ausgesprochene Satz gilt auch für jeden beliebigen elastischen Körper, der bei Abwesenheit äußerer Belastungen einen eindeutig bestimmten »natürlichen« Zustand besitzt.

Eine letzte Frage muß hier noch kurz gestreift werden, die auf unser ursprüngliches Problem, die Entscheidung, ob ein Gleichgewichtszustand stabil oder nicht stabil ist, zurückführt. Wir haben in unseren Beispielen (abgesehen vom ersten, dem einfachsten Fachwerk-Beispiel) immer eine Belastungsgröße schlechthin als »die« kritische Last bezeichnet, obwohl es sich nur um eine, und zwar die kleinste, von unendlich vielen Wurzeln der Knickgleichung handelte. Dies ist zunächst in naheliegender Analogie zu dem gewöhnlichen, Eulerschen Fall der Knickung geschehen. Man weiß, daß beispielsweise für die unten eingespannte, oben freie Säule der Abb. 16 die vollständige Lösung der Knickgleichung

Abb. 16

$$P_m = (m - 1/2)^2 \pi^2 \frac{EJ}{l^2}, \qquad m = 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

lautet. Jeder der ∞ viel Werte $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots$ ist eine Verzweigungsstelle des Gleichgewichtes, d. h. es zweigt jedesmal von der gestreckten Gleichgewichtsform eine neue gebogene Form ab: bei P_1 der in Abb. 16 b dargestellte Halbsinusbogen, bei P_2 die Form 16 c mit einem Wendepunkt im Innern usw. (die Eigenlösungen von $y'' = -Py/EJ$ bei $y(0) = y'(l) = 0$). Nach dem eben Auseinandergesetzten weiß man nur, daß für $P < P_1$ die gestreckte Lage stabil sein muß; was eigentlich oberhalb P_1, dann oberhalb P_2 usw. geschieht, bedarf erst noch der Untersuchung. Die bisherige Behandlung dieser Frage hat zu widersprechenden Ergebnissen geführt. L. Saalschütz behauptet[1]), daß die wendepunktfreie Form b nur zwischen P_1 und P_2 stabil sei, dann gehe die Stabilität auf die Form c über. H. Bryan und mit ihm A. E. H. Love[2]) suchen nachzuweisen, daß für jede P_1 überschreitende Belastung die Form b die stabile ist. Von den Ableitungen ist aber keine einwandfrei. Saalschütz betrachtet nicht die Wirkung einer vorübergehenden kleinen Störung, sondern die einer kleinen, aber dauernden Aenderung

[1]) L. Saalschütz, Der belastete Stab, Leipzig 1880, S. 133.

[2]) A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von Timpe, Leipzig 1907, S. 471.

der Belastung. Bryan und Love vergleichen die Werte, die das Potential U bei einem gegebenen großen Werte von P für die verschiedenen bei diesem P möglichen Gleichgewichtsformen annimmt, und finden, daß es im Falle b immer am kleinsten ist. Die Schlußweise beruht wohl auf der anschaulichen Analogie zu dem Gleichgewichtsproblem im Schwerefeld: die tiefste Lage ist immer die stabilste. Allein es kann doch wohl auch vorkommen, daß höher gelegene Muldenpunkte existieren und daß gerade der tiefste ein Sattelpunkt ist. Ich habe für den Fall der eingespannten Säule die allein maßgebende Untersuchung der zweiten Variation von U — entsprechend der in **1** erwähnten quadratischen Form in dx, dy für den Fachwerkfall — durchgeführt und bin zu einem Ergebnis gelangt, das für Bryan-Love und gegen Saalschütz entscheidet: Es ist unterhalb der ersten Eulerschen Last P_1 nur die gestreckte, oberhalb P_1 nur die wendepunktfreie Ausbiegungsform stabil. Damit erhalten die früher mitgeteilten Einzelresultate einen gewissen systematischen Abschluß. Die — im übrigen ganz elementare — Rechnung soll im Zusammenhang mit der näheren Begründung der in diesem Abschnitt ausgesprochenen Sätze später veröffentlicht werden. 350

Über die Knicksicherheit ebener Bleche bei exzentrischer Randbelastung.

Von E. SCHWERIN in Charlottenburg.[1]

Die nicht nur für den Hoch- und Brückenbau, sondern auch für den Schiffbau praktisch wichtige Frage der Knicksicherheit ebener, achsial belasteter Bleche ist zuerst von Bryan[2]) untersucht und auch für den Fall freier Auflagerung des unbelasteten Randes gelöst worden, wobei er das Energiekriterium zur Aufstellung der Stabilitätsbedingung benutzte. Später hat dann Reißner[3]), von der Bryanschen Grundgleichung ausgehend, für die hauptsächlichsten, praktisch wichtigen Fälle der Grenzbedingungen am unbelasteten Rande die Knicksicherheit bestimmt und auch zahlenmäßig ausgewertet.

Sowohl die Bryanschen wie die Reißnerschen Untersuchungen bezogen sich jedoch nur auf eine gleichförmige Verteilung der Belastung über die Randlinie — wenn man von der zwar strengen, aber praktisch wegen ungenügender Reihenkonvergenz versagenden Lösung Reißners für den Fall reiner Biegungsbelastung absieht —, und es entsteht daher die Frage nach der Knicksicherheit eines ebenen Bleches, dessen Randbelastung diese Gleichförmigkeit nicht mehr aufweist.

Praktisch wichtig wird insbesondere der allgemeine Fall linearer Lastverteilung über die Randlinie sein, wie sie z. B. bei dem Stegblech jedes zugleich auf Biegung und Knickung beanspruchten Trägers vorliegt. Da die genaue Behandlung dieses Falles sich jedoch recht verwickelt gestaltet, soll im folgenden eine Belastungsweise eingehend untersucht werden, die der linearen nahekommt und deren Wirkung abschätzen läßt: nämlich der Fall, daß jede Blechhälfte zwar in sich gleichmäßig, aber die eine stärker als die andere belastet ist.

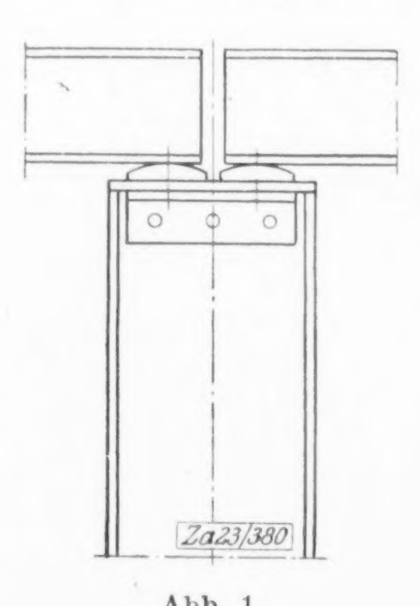


Abb. 1

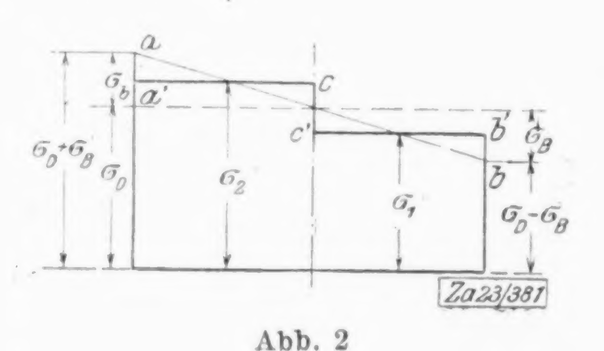


Abb. 2

[1]) Vorgetragen auf der Versammlung in Marburg am 24. September 1923.

[2]) London Math. Soc. Proc. Vol. 22 (1891), p. 54.

[3]) Zentralbl. d. Bauverw. 1909, Nr. 14, S. 93.

Dieser Belastungsfall liegt z. B. unmittelbar vor beim Stegblech einer Stütze nach Abb. 1, und angenähert, wenn die allgemeine lineare Verteilung $a-b$ (Abb. 2) durch die stufenweise veränderliche $a'-c-c'-b'$ ersetzt gedacht wird.

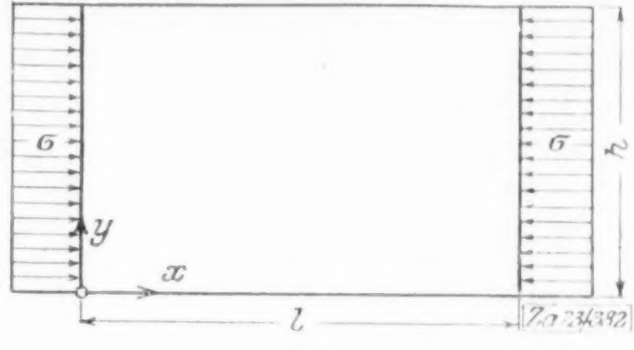


Abb. 3

1. Ableitung der Knickbedingung. Um für die angegebene Lastverteilung die Knickbedingung zu erhalten, gehen wir aus von der Bryanschen Grundgleichung für die Durchbiegung w einer durch die Druckspannung σ auf die Flächeneinheit des Randes belasteten ebenen Platte von der Höhe h, der Länge l, der Stärke d. Wird ein Koordinatensystem x, y nach Abb. 3 zugrunde gelegt, so lautet die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\,\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{12\,\sigma\,(1-\mu^2)}{E}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

oder wenn noch $x/l = \xi$, $y/h = \eta$ eingeführt wird:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4}\left(\frac{h}{l}\right)^4 + \frac{2\,\partial^4 w}{\partial \xi^2\,\partial \eta^2}\left(\frac{h}{l}\right)^2 + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{12\,\sigma\,(1-\mu^2)}{E}\cdot\left(\frac{h}{l}\right)^2\left(\frac{h}{d}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad . \quad . \quad (1a).$$

Wird längs der beiden belasteten Ränder gelenkige Lagerung vorausgesetzt, so genügt den dann dort geltenden Grenzbedingungen $w = 0$; $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0$ jedes Glied des Ansatzes:

$$w = \sum_1^\infty w_n \sin n\,\pi\,\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Hierin ist n eine beliebige positive ganze Zahl und w_n eine Funktion nur noch von η, für deren Bestimmung sich durch Einführung von (2) in (1) folgende totale Differentialgleichung ergibt[1]):

$$\frac{d^4 w_n}{d\,\eta^4} - 2\,\lambda\,\frac{d^2 w_n}{d\,\eta^2} + \lambda\,(\lambda-\delta)\,w_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

mit

$$\lambda = \left(n\,\pi\,\frac{h}{l}\right)^2, \qquad \delta = \left(\alpha\,\frac{h}{d}\right)^2, \qquad \alpha^2 = \frac{12\,\sigma\,(1-\mu^2)}{E}.$$

Das allgemeine Integral dieser gewöhnlichen Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet:

$$w_n = A\,\mathfrak{Cos}\,m_1\,\eta + B\,\mathfrak{Sin}\,m_1\,\eta + C\cos m_2\,\eta + D\sin m_2\,\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

worin:

$$m_1 = \sqrt{\sqrt{\lambda\,\delta} + \lambda}, \qquad m_2 = \sqrt{\sqrt{\lambda\,\delta} - \lambda}\,.$$

Es möge jetzt eine Platte von der Höhe $2h$, der Stärke d, der Länge l nach Abb. 4 mit den Belastungen σ_1 σ_2 der beiden Hälften vorliegen. Dann kann man sie aus zwei in der Plattenachse zusammenstoßenden Hälften I, II zusammengesetzt denken, und man wird nach (4) für deren Ausbiegungen allgemein erhalten:

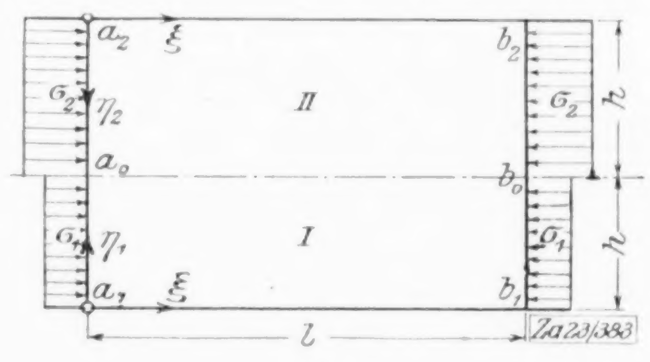


Abb. 4

$$\left.\begin{aligned} w_{n_I} &= A\,\mathfrak{Cos}\,m_1\,\eta_1 + B\,\mathfrak{Sin}\,m_1\,\eta_1 + C\cos m_2\,\eta_1 + D\sin m_2\,\eta_1 \\ w_{n_{II}} &= E\,\mathfrak{Cos}\,n_1\,\eta_2 + F\,\mathfrak{Sin}\,n_1\,\eta_2 + G\cos n_2\,\eta_2 + H\sin n_2\,\eta_2 \end{aligned}\right\} \quad (4\,\text{a, b}).$$

worin:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \sqrt{\sqrt{\lambda\,\delta_1} + \lambda}, & n_1 &= \sqrt{\sqrt{\lambda\,\delta_2} + \lambda}, & \delta_1 &= \left(\alpha_1\,\frac{h}{d}\right)^2, & \alpha_1{}^2 &= \frac{12\,\sigma_1\,(1-\mu^2)}{E} \\ m_2 &= \sqrt{\sqrt{\lambda\,\delta_1} - \lambda}, & n_2 &= \sqrt{\sqrt{\lambda\,\delta_2} - \lambda}, & \delta_2 &= \left(\alpha_2\,\frac{h}{d}\right)^2, & \alpha_2{}^2 &= \frac{12\,\sigma_2\,(1-\mu^2)}{E} \end{aligned}\right\} \quad (4\,\text{c})$$

und die in den Lösungen für jede Plattenhälfte auftretenden je 4 willkürlichen Konstanten aus den Randbedingungen längs der Linien $a_0\,b_0$ und $a_1\,b_1$ bezw. $a_2\,b_2$ zu bestimmen sind.

[1]) Im folgenden ist die Reißnersche Bezeichnungsweise beibehalten.

Um nun zu einfachen, übersichtlichen Endergebnissen zu gelangen, werde ebenso wie längs der belasteten Ränder auch längs der Ränder $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ gelenkige Lagerung vorausgesetzt, was praktisch oft gerechtfertigt sein wird, nämlich immer dann, wenn infolge verhältnismäßig schwacher Gurtwinkel und bei nur einer Nietreihe eine vollkommene Einspannung der Blechränder in den Gurtungen nicht sicher gewährleistet ist.

Unter dieser Voraussetzung lauten die Randbedingungen:

$$\text{für } \eta_1 = 0: \; w_{n_I} = 0, \quad \frac{d^2 w_{n_I}}{d \eta_1^2} = 0, \qquad \text{für } \eta_2 = 0: \; w_{n_{II}} = 0, \quad \frac{d^2 w_{n_{II}}}{d \eta_2^2} = 0,$$

also nach (4a): $A + C = 0$, $A m_1^2 - C m_2^2 = 0$, d. h. $A = C = 0$;

nach (4b): $E + G = 0$, $E n_1^2 - G n_2^2 = 0$, d. h. $E = G = 0$, wenn zunächst $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 \neq 0$ vorausgesetzt wird, so daß:

$$w_{n_I} = B \,\mathfrak{Sin}\, m_1 \eta_1 + D \sin m_2 \eta_1, \qquad w_{n_{II}} = F \,\mathfrak{Sin}\, n_1 \eta_1 + H \sin n_2 \eta_2 \quad . \quad . \quad (5).$$

Die hierin noch auftretenden 4 Integrationskonstanten bestimmen sich aus der Forderung, daß an der Stoßkante beider Plattenhälften Durchbiegung, Tangentenneigung, Biegungsmoment und Querkraft stetig ineinander übergehen müssen. Diese Bedingung liefert folgende 4 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} w_{n_I(\eta_1 = +1)} &= w_{n_{II}(\eta_2 = +1)}, & \left(\frac{d^2 w_{n_I}}{d \eta_I^2}\right)_{(\eta_1 = +1)} &= \left(\frac{d^2 w_{n_{II}}}{d \eta_2^2}\right)_{(\eta_2 = +1)} \\ \left(\frac{d w_{n_I}}{d \eta_1}\right)_{(\eta_1 = +1)} &= -\left(\frac{d w_{n_{II}}}{d \eta_2}\right)_{(\eta_2 = +1)}, & \left(\frac{d^3 w_{n_I}}{d \eta_I^3}\right)_{(\eta_1 = +1)} &= -\left(\frac{d^3 w_{n_{II}}}{d \eta_2^3}\right)_{(\eta_2 = +1)} \end{aligned}\right\} \quad (6),$$

oder bei Einführung von (5):

$$\begin{aligned} B \,\mathfrak{Sin}\, m_1 + D \sin m_2 &= F \,\mathfrak{Sin}\, n_1 + H \sin_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\text{a}) \\ B m_1 \,\mathfrak{Cof}\, m_1 + D m_2 \cos m_2 &= - F n_1 \,\mathfrak{Cof}\, n_1 - H n_2 \cos n_2 \quad . \quad . \quad (6\text{b}) \\ B m_1^2 \,\mathfrak{Sin}\, m_1 - D m_2^2 \sin m_2 &= F n_1^2 \,\mathfrak{Sin}\, n_1 - H n_2^2 \sin n_2 \quad . \quad . \quad (6\text{c}) \\ B m_1^3 \,\mathfrak{Cof}\, m_1 - D m_2^3 \cos m_2 &= - F n_1^3 \,\mathfrak{Cof}\, n_1 + H n_2^3 \cos n_2 \quad . \quad . \quad (6\text{d}). \end{aligned}$$

Für die aus diesem Gleichungssystem zu bestimmenden Integrationskonstanten B, D, F, H werden sich nur dann von Null verschiedene Werte ergeben, und es wird also nur dann eine von der ebenen Blechform abweichende ausgebeulte Form möglich sein, wenn die Nennerdeterminante obigen Gleichungssystems verschwindet; die Nullsetzung jener Determinante liefert also die Knickbedingung.

Um nun diese Determinante vierten Grades auszuwerten, führen wir sie zunächst auf eine Determinante zweiten Grades zurück.

Die Elimination von D aus (6a), (6c) und (6b), (6d) liefert, wenn:

$$\frac{m_1^2 - n_1^2}{m_1^2 + m_2^2} = \frac{m_2^2 - n_2^2}{m_1^2 + m_2^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}}\right) = \gamma$$

gesetzt wird;

$$B \,\mathfrak{Sin}\, m_1 = F(1-\gamma) \,\mathfrak{Sin}\, n_1 + H \gamma \sin n_2$$

$$B m_1 \,\mathfrak{Cof}\, m_1 = - F(1-\gamma) n_1 \,\mathfrak{Cof}\, n_1 - H \gamma n_2 \cos n_2,$$

mithin:

$$F(1-\gamma)\left[m_1 \,\mathfrak{Sin}\, n_1 \,\mathfrak{Cof}\, m_1 + n_1 \,\mathfrak{Cof}\, n_1 \,\mathfrak{Sin}\, m_1\right] + H\gamma\left[m_1 \sin n_2 \,\mathfrak{Cof}\, m_1 + n_2 \cos n_2 \,\mathfrak{Sin}\, m_1\right] = 0 \quad (7\text{a}),$$

und analog die Elimination von B aus (6a), (6c) und (6b), (6d):

$$D \sin m_2 = F\gamma \,\mathfrak{Sin}\, n_1 + H(1-\gamma) \sin n_2.$$

$$D m_2 \cos m_2 = - F\gamma n_1 \,\mathfrak{Cof}\, n_1 - H(1-\gamma) n_2 \cos n_2,$$

somit:

$$F\gamma\left[m_2 \,\mathfrak{Sin}\, n_1 \cos m_2 + n_1 \,\mathfrak{Cof}\, n_1 \sin m_2\right] + H(1-\gamma)\left[m_2 \sin n_2 \cos m_2 + n_2 \cos n_2 \sin m_2\right] = 0 \quad (7\text{b}).$$

Demnach liefert das Verschwinden der Nennerdeterminante von (7a), (7b) folgende Knickbedingung:

$$\begin{vmatrix} (1-\gamma)\left[m_1 \,\mathfrak{Sin}\, n_1 \,\mathfrak{Cof}\, m_1 + n_1 \,\mathfrak{Cof}\, n_1 \,\mathfrak{Sin}\, m_1\right] & \gamma\left[m_1 \sin n_2 \,\mathfrak{Cof}\, m_1 + n_2 \cos n_2 \,\mathfrak{Sin}\, m_1\right] \\ \gamma\left[m_2 \,\mathfrak{Sin}\, n_1 \cos m_2 + n_1 \,\mathfrak{Cof}\, n_1 \sin m_2\right] & (1-\gamma)\left[m_2 \sin n_2 \cos m_2 + n_2 \cos n_2 \sin m_2\right] \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

Für: $\delta_1 = \delta_2 = \delta$; $n_1 = m_1$; $n_2 = m_2$; $\gamma = 0$, d. h. den **Bryanschen** Spezialfall gleichförmiger Druckbelastung eines Bleches von der Höhe $2h$, der Länge l und der Stärke d erhält man hieraus: $2 \sin m_2 \cos m_2 = \sin(2 m_2) = 0$.

$$m_2 = \sqrt{\sqrt{\lambda}\,\delta - \lambda} = \frac{\pi}{2} \cdot [0], 1, 2\ 3 \ldots\ldots \qquad (8\,\mathrm{a}),$$

$$\text{oder:} \quad \delta = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\pi^2}{4} + \lambda\right)^2, \qquad \text{wo:} \quad \delta = \frac{12\,\sigma\,(1-\mu^2)}{E} \cdot \left(\frac{h}{d}\right)^2.$$

Für den allgemeinen Fall: $\delta_2 \lessgtr \delta_1$ kann (8) in der Form geschrieben werden:

$$m_1 m_2 n_1 n_2\, \mathfrak{Cof}\, m_1\, \mathfrak{Cof}\, n_1 \cos m_2 \cos n_2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{\mathfrak{Tg}\, n_1}{n_1} + \frac{\mathfrak{Tg}\, m_1}{m_1} & \frac{\mathrm{tg}\, n_2}{n_2} + \frac{\mathfrak{Tg}\, m_1}{m_1} \\ \gamma^2\left[\frac{\mathfrak{Tg}\, n_1}{n_1} + \frac{\mathrm{tg}\, m_2}{m_2}\right] & (1-\gamma)^2\left[\frac{\mathrm{tg}\, n_2}{n_2} + \frac{\mathrm{tg}\, m_2}{m_2}\right] \end{vmatrix} = 0,$$

oder, da hier weder: $m_2 = \frac{\pi}{2}$ noch: $n_2 = \frac{\pi}{2}$ — wie im **Bryanschen** Fall — eine Wurzel von (8) sein kann und für: $m_2 = 0$ oder $n_2 = 0$ ($\lambda = \delta$) — wie im **Eulerschen** Fall — überhaupt keine die vorgeschriebenen Grenzbedingungen erfüllende Ausbiegung zustande kommen könnte:

$$\begin{vmatrix} \frac{\mathfrak{Tg}\, n_1}{n_1} + \frac{\mathfrak{Tg}\, m_1}{m_1} & \frac{\mathrm{tg}\, n_2}{n_2} + \frac{\mathfrak{Tg}\, m_2}{m_2} \\ \left(1 - \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}}\right)^2\left[\frac{\mathfrak{Tg}\, n_1}{n_1} + \frac{\mathrm{tg}\, m_2}{m_2}\right] & \left(1 + \sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}}\right)^2\left[\frac{\mathrm{tg}\, n_2}{n_2} + \frac{\mathrm{tg}\, m_2}{m_2}\right] \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \qquad (8\,\mathrm{b}).$$

Eine besondere Betrachtung erfordert noch der Fall, daß die eine Blechhälfte unbelastet, also etwa $\delta_2 = 0$ ist. Dann hat nämlich die charakteristische Gleichung von (3) die beiden Doppelwurzeln: $\pm \sqrt{\lambda}$. Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten folgt, daß dann das allgemeine Integral für die unbelastete Hälfte lautet:

$$w_{n_{II}} = E\, \mathfrak{Cof}\, n_1 \eta_2 + F\, \mathfrak{Sin}\, n_1 \eta_2 + G\, \eta_2\, \mathfrak{Sin}\, n_1 \eta_2 + H\, \eta_2\, \mathfrak{Cof}\, n_1 \eta_2, \qquad \text{wo:} \ n_1 = \sqrt{\lambda}.$$

Für die hier vorausgesetzte gelenkige Lagerung längs des unbelasteten Randes muß sein:

$$w_{n_{II}(\eta_2 = 0)} = E = 0$$

und:

$$\frac{d^2 w_{n_{II}}}{d\,\eta_2{}^2}_{(\eta_2 = 0)} = E\, n_1{}^2 + G\,(1 + n_1) = 0, \quad \text{d. h.}\ G = 0,$$

so daß dann das die Randbedingungen erfüllende Integral für die unbelastete Hälfte lautet:

$$w_{n_{II}} = F\, \mathfrak{Sin}\, n_1 \eta_2 + H\, \eta_2\, \mathfrak{Cof}\, n_1 \eta_2 \quad \ldots\ldots \qquad (5\,\mathrm{a})$$

und die Stetigkeitsbedingungen längs der Plattenmitte folgende Bestimmungsgleichungen für die vier Integrationskonstanten liefern:

$$B\, \mathfrak{Sin}\, m_1 + D \sin m_2 = F\, \mathfrak{Sin}\, n_1 + H\, \mathfrak{Cof}\, n_1 \quad \ldots\ldots \qquad (9\,\mathrm{a}),$$

$$B\, m_1\, \mathfrak{Cof}\, m_1 + D\, m_2 \cos m_2 = -F\, n_1\, \mathfrak{Cof}\, n_1 - H\,(n_1\, \mathfrak{Sin}\, n_1 + \mathfrak{Cof}\, n_1) \quad . \quad . \qquad (9\,\mathrm{b}),$$

$$B\, m_1{}^2\, \mathfrak{Sin}\, m_1 - D\, m_2{}^2 \sin m_2 = F\, n_1{}^2\, \mathfrak{Sin}\, n_1 + H\, n_1\,(n_1\, \mathfrak{Cof}\, n_1 + 2\, \mathfrak{Sin}\, n_1) \qquad (9\,\mathrm{c}),$$

$$B\, m_1{}^3\, \mathfrak{Cof}\, m_1 - D\, m_2{}^3 \cos m_2 = -F\, n_1{}^3\, \mathfrak{Cof}\, n_1 - H\, n_1{}^2\,(n_1\, \mathfrak{Sin}\, n_1 + 3\, \mathfrak{Cof}\, n_1) \qquad (9\,\mathrm{d}).$$

In ganz analoger Weise wie oben ergibt die Elimination von B aus 9 a) c) und b) d) und von D aus 9 a) c) und b) d) zwei Gleichungen für F und H mit folgender Nennerdeterminante:

$$\begin{vmatrix} m_1\, \mathfrak{Sin}\, n_1\, \mathfrak{Cof}\, m_1 + n_1\, \mathfrak{Cof}\, n_1\, \mathfrak{Sin}\, m_1 & \begin{matrix} m_1\, \mathfrak{Cof}\, m_1 \left[\mathfrak{Cof}\, n_1 + \frac{2}{\sqrt{\delta}}\, \mathfrak{Sin}\, n_1\right] \\ + n_1\, \mathfrak{Sin}\, m_1 \left[\mathfrak{Sin}\, n_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{2}{\sqrt{\delta}}\right) \mathfrak{Cof}\, n_1\right] \end{matrix} \\ m_2\, \mathfrak{Sin}\, n_1 \cos m_2 + n_1\, \mathfrak{Cof}\, n_1 \sin m_2 & \begin{matrix} m_2 \cos m_2 \left[\mathfrak{Cof}\, n_1 - \frac{2}{\sqrt{\delta}}\, \mathfrak{Sin}\, n_1\right] \\ + n_1 \sin m_2 \left[\mathfrak{Sin}\, n_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{2}{\sqrt{\delta}}\right) \mathfrak{Cof}\, n_1\right] \end{matrix} \end{vmatrix}$$

deren Verschwinden nach Division mit den sämtlich von Null verschiedenen Werten:

$$m_1\, m_2\, n_1\, \mathfrak{Cof}\, m_1\, \mathfrak{Cof}\, n_1 \cos m_2$$

als Knickbedingung liefert:

$$\begin{vmatrix} \frac{\mathfrak{Tg}\, n_1}{n_1} + \frac{\mathfrak{Tg}\, m_1}{m_1} & \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\sqrt{\delta\lambda}} \frac{\mathfrak{Tg}\, n_1}{n_1} + \frac{\mathfrak{Tg}\, m_1}{m_1} \left(\frac{\mathfrak{Tg}\, n_1}{n_1} + \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\sqrt{\delta\lambda}} \right) \\ \frac{\mathfrak{Tg}\, n_1}{n_1} + \frac{\operatorname{tg} m_2}{m_2} & \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\sqrt{\delta\lambda}} \frac{\mathfrak{Tg}\, n_1}{n_1} + \frac{\operatorname{tg} m_2}{m_2} \left(\frac{\mathfrak{Tg}\, n_1}{n_1} + \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\sqrt{\delta\lambda}} \right) \end{vmatrix} = 0 \quad . \qquad (8\,c)$$

2. Auswertung der Knickgleichung. Mit Hilfe der Knickbedingungen 8 a) b) c) ist es nun möglich, für eine Platte von gegebener Belastung, Höhe und Stärke, also bei gegebenem δ denjenigen Wert von λ zu bestimmen, für den ein Ausknicken möglich wird. Führt man diese Rechnung durch, so erhält man für ein Verhältnis $\frac{\delta_2}{\delta_1} = 0, 1, 2, 3, 4,$ folgende zusammengehörige Werte von λ und δ_1:

$\delta_2 = 0$		$\frac{\delta_2}{\delta_1} = 1$ (Bryan)		$\frac{\delta_2}{\delta_1} = 2$		$\frac{\delta_2}{\delta_1} = 3$		$\frac{\delta_2}{\delta_1} = 4$	
δ_1	λ	δ_1	λ	δ_1	λ	δ_1	λ	δ_1	λ
18,03	2	9,96	2	6,565	2	4,86	2	3,845	2
17,48	3	9.94	3	6,53	3	4,795	3	3,78	3
17,9	4	10,45	4	7	4,46	5,22	4,8	4,23	5
20	6,46	15,55	10	20	28,35	15	31,89	12	34,3
40	25,54	35,1	30	31,46	50	21,40	50	16,09	50
60	45,2	55,2	50						

Auf Grund dieser in Abb. 5 graphisch veranschaulichten Zahlenwerte kann man nun nicht nur für jede der untersuchten Belastungsweisen sofort die zugehörige Knicklänge ablesen, sondern es können auch einige allgemeine Schlüsse auf die Knicksicherheit derartig belasteter Platten gezogen werden.

Hierzu ist es zweckmäßig, die Größe λ nicht als Funktion von δ_1 und dem Verhältnis $\frac{\delta_2}{\delta_1}$ aufzufassen, sondern

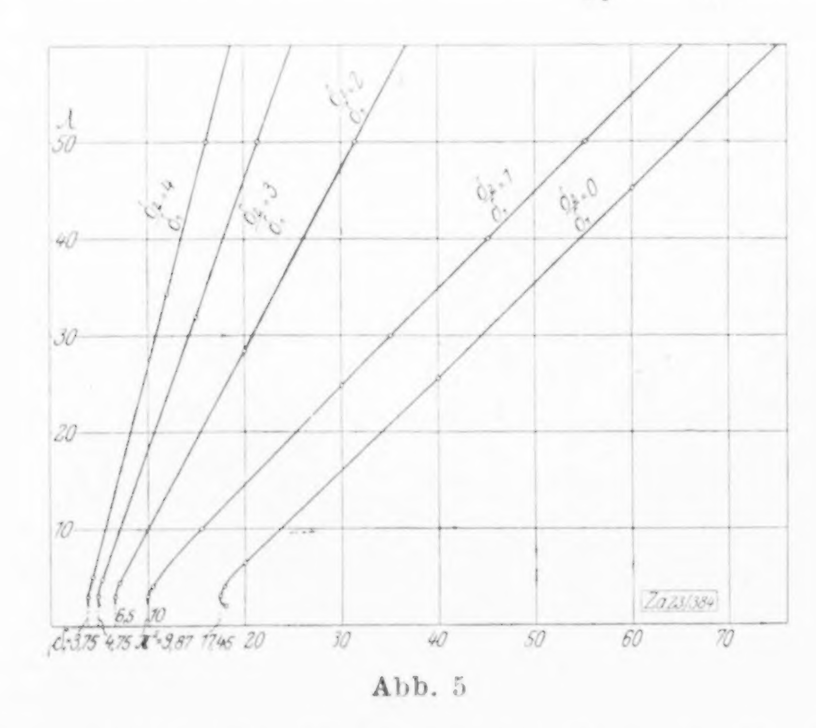


Abb. 5

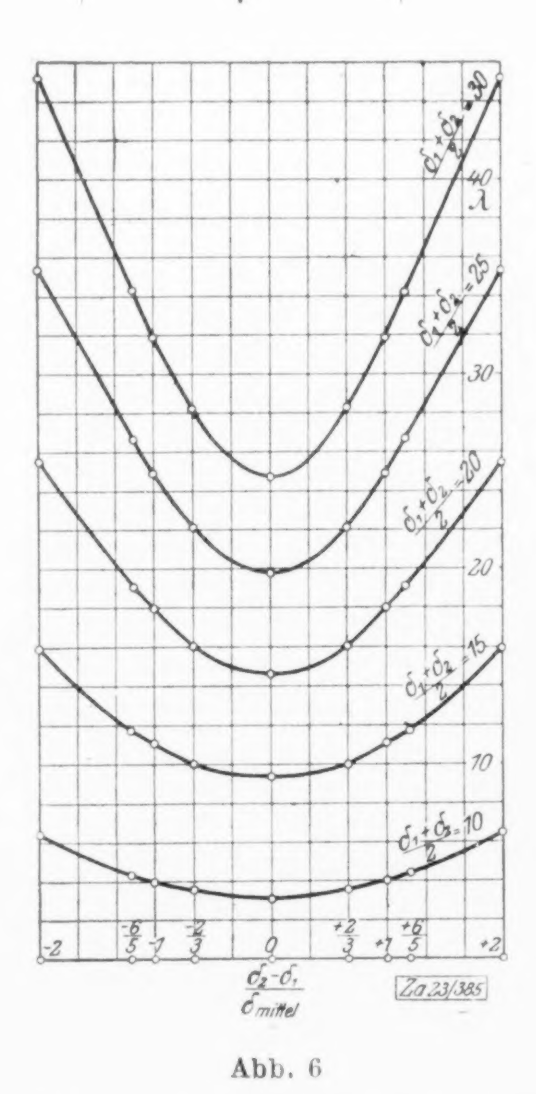


Abb. 6

als unabhängige Veränderliche einerseits die der mittleren Belastung proportionale Größe $\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \delta_{\text{mittel}}$ andererseits die Größe $\nu = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_{\text{mittel}}}$ einzuführen; letztere stellt eine Art Ungleichförmigkeitsgrad der Belastung dar und hat auch, wenn eine lineare Spannungsverteilung (nach Abb. 2) ausgeglichen wird, eine anschauliche statische Bedeutung: sie ist nämlich, wenn bei einem auf Biegung und Knickung beanspruchten Blech in a die Randspannung $\sigma_D + \sigma_B$ in b $\sigma_D + \sigma_B$ herrscht, gleich dem Verhältnis: $\frac{\sigma_B}{\sigma_D} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}}$.

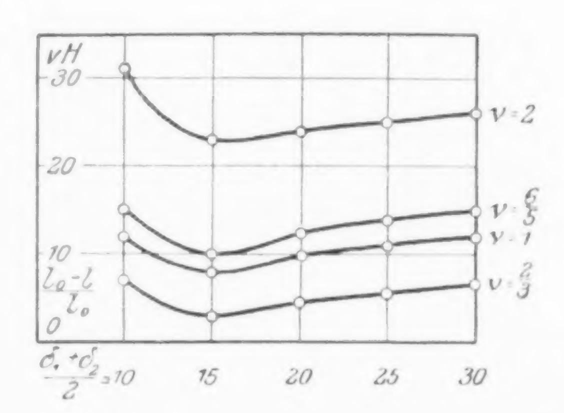
Auf diese Weise erhält man Abb. 6, in der den Werten:

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

die Abszissen $\nu = -2 \quad 0 \quad {}^2/_3 \quad 1 \quad {}^6/_5$ entsprechen und man kann nun zunächst folgendes erkennen:

Für einen bestimmten Wert von ν nimmt mit wachsender mittlerer Belastung auch λ zu, d. h. der höchst zulässige Abstand der Aussteifungen ab. Da $\delta = \left(\alpha \frac{h}{d}\right)^2$ ist, wirkt eine Verringerung der Plattendicke bei festgehalten gedachter Plattenhöhe im gleichen Sinne. Ferner erkennt man aber auch, daß für eine bestimmte mittlere Belastung mit wachsendem Absolutwert ν der Ungleichförmigkeit der Belastung λ immer größer wird, d. h. die zulässige Knicklänge immer mehr abnimmt. Für ein und dieselbe Gesamtlast ergibt sich also die Knicklänge am größten, wenn $\nu = 0$ d. h. dieselbe gleichmäßig wie im Bryanschen Fall über die ganze Randlänge $2h$ verteilt ist; jede andere Verteilung einer und derselben Gesamtlast liefert eine kleinere, höchst zulässige Knicklänge oder einen kleineren, höchst zulässigen Abstand der Aussteifungen. Am ungünstigsten hinsichtlich dieser Verringerung der Knicklänge wirkt von den betrachteten Belastungsweisen die vollständige Entlastung einer Blechhälfte $|\nu| = 2$. In letzterem Falle steigt z. B. für $\delta_{\text{mittel}} = 10$ λ von 3,1 bei gleichmäßiger Verteilung auf 6,46, so daß die zugehörigen Knicklängen bei gleicher Blechbreite sich verhalten wie $\sqrt{\frac{3,1}{6,46}} = 0,69$ d. h. der für gleichförmige Belastungen bestimmte Abstand der Aussteifungen wäre um 31 vH herabzusetzen; ja für $\delta_{\text{mittel}} = \pi^2$, den Grenzwert des Bryanschen Falles, würde λ von 2,47 auf 6,2 wachsen, woraus eine Abnahme der zulässigen freien Länge um sogar 37 vH, d. h. mehr als ein Drittel der ursprünglichen, sich ergeben würde.

In den Abb. 6a und 6b ist diese prozentuale Abnahme der für gleichmäßige Belastung berechneten Länge l_0 bei den verschiedenen Ungleichförmigkeitsgraden veranschaulicht. Man erkennt aus diesen beiden Darstellungen, daß auch die prozentuale Abnahme von l_0 mit zunehmender Ungleichförmigkeit rasch wächst, und zwar nimmt sie für jede bestimmte mittlere Last stetig zu; hingegen nimmt sie, wie aus Abb. 6a hervorgeht, nicht gleichmäßig mit der Erhöhung der mittleren Last oder Verringerung der Plattenstärke zu. Vielmehr fällt sie zunächst, erreicht bei etwa $\delta_{\text{mittel}} = 15$ ein Minimum, um dann mit wachsendem δ_{mittel} wieder langsam zu steigen; dieser charakteristische Verlauf ist bei allen Werten von ν vorhanden.



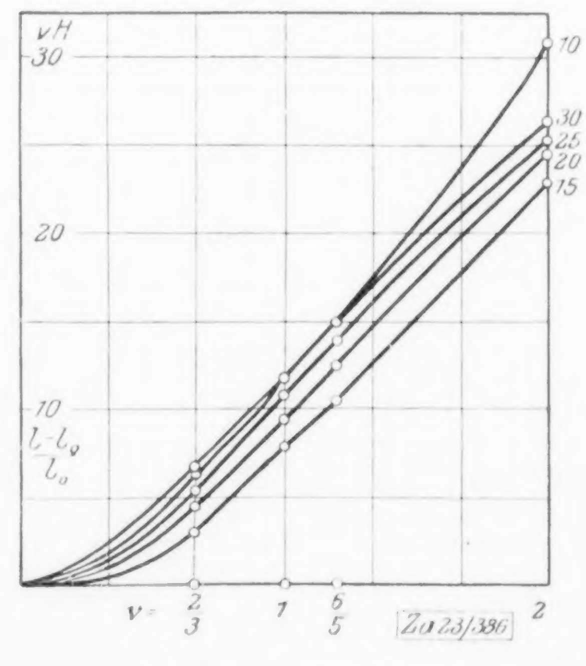


Abb. 6a und 6b

Diese prozentuale Abnahme von l_0 entbehrt insofern nicht einer gewissen praktischen Bedeutung, als sie den Fehler darstellt, den man begehen würde, wenn man bei Bestimmung der zulässigen Knicklänge einfach mit dem Mittelwert $\delta_{\text{mittel}} = \frac{\delta_2 - \delta_1}{2}$ nach Bryan rechnen würde. Nach obigem und nach Abb. 6a würde die so erhaltene Knicklänge, falls z. B. nur eine Plattenhälfte tatsächlich belastet ist, je nach der Höhe der Last um etwa 22 bis 25 vH verringert werden müssen, um die wirkliche Knicklänge zu errhalten und man erkennt, daß dieses Rechnungsverfahren nur bei kleiner Ungleichförmigkeit der Belastung zulässig sein wird. Sieht man einen Fehler von ca. 10 vH noch als zulässig an, so würde ν höchstens etwa $= 1$ sein, d. h. die eine Blechhälfte höchstens dreimal so stark als die andere belastet sein dürfen, wobei der begangene Fehler zwischen 8 und 12 vH schwanken, im Mittel also ca. 10 vH betragen würde. Diese Belastungsweise würde bei Ausgleich nach Abb. 2 die Randspannung Null

am schwächer belasteten Rande ergeben, also wenn man sich das Druckdiagramm durch eine Einzelkraft hervorgebracht denkt, dem Kraftangriff im Drittel- (Kern)- Punkt des Querschnitts entsprechen.

Umgekehrt kann man sich auch die Frage vorlegen, welche gleichförmig über dem Rand verteilt gedachte Last nach Bryan dieselbe Knicklänge ergeben würde, wie die tatsächliche Last. Auch diese Frage läßt sich an Hand der gewonnenen zusammengehörigen Werte von λ und δ beantworten. Bezeichnet $\delta_{\text{äquivalent}}$ jenen gesuchten Ersatzwert, so gibt Abb. 7 das Verhältnis $\frac{\delta_{\text{äquivalent}}}{\delta_{\text{mittel}}}$ an. Man erkennt, daß dieses Verhältnis von 1 stark differieren kann und umsomehr diesen Wert überschreitet, je größer die Ungleichförmigkeit und je größer δ_{mittel} selbst ist, also besonders bei stark belasteten oder sehr dünnen Platten wesentlich größer als 1 ist; ja es würde bei völliger Entlastung einer Blechhälfte und $\delta_{\text{mittel}} = 30$ sogar bis auf 1,7 ansteigen können, d. h. man müßte mit $\delta_{\text{äquivalent}} = 1{,}70 \cdot \frac{\delta_2 + 0}{2} = 0{,}85\,\delta_2$, also mit 85 vH der Belastungsintensität der belasteten Blechhälfte statt mit 50 vH derselben rechnen, um nach Bryan die richtige Knicklänge zu erhalten.

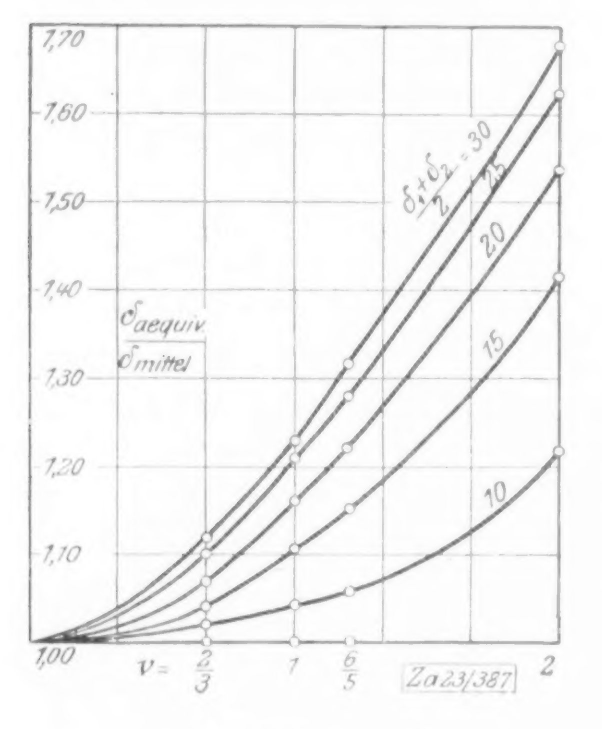
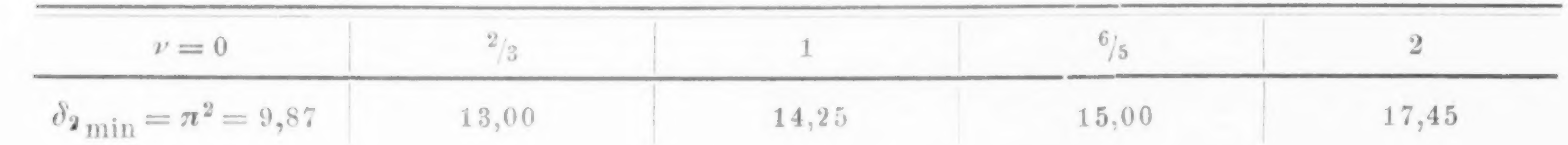


Abb. 7

Endlich kann man noch nach derjenigen Stärke einer Platte von gegebenem h und gegebener Belastung fragen, bei der auch bei vollständigem Fehlen jeder Aussteifung kein Ausknicken mehr eintritt. Auch diese Frage kann an Hand von Abb. 5 beantwortet werden. Letztere zeigt, daß jede, einem bestimmten Ungleichförmigkeitsgrad entsprechende Kurve aus einem oberen und unteren Zweig besteht, von denen jedoch nur der obere in Frage kommt, da er daß größere λ, also die kleinere Knicklänge liefert. An der Stelle, wo beide Zweige in einander übergehen, ist daher als Fortsetzung des oberen Zweiges eine vertikale Gerade zu denken, und es ergibt sich hier ein gewisser Kleinstwert $\delta_{\min}$, unterhalb dessen zu einem bestimmten Wert keine reelle Wurzel des Knickkriteriums (8) mehr gehört, ein Ausbeulen des Bleches also auch bei unendlich großer, freier Länge nicht mehr möglich ist. Die so bestimmten Grenzwerte $\delta_{2\,\min}$ sind in der folgenden Tabelle angegeben:



$\nu = 0$	$^2/_3$	1	$^6/_5$	2
$\delta_{2\,\min} = \pi^2 = 9{,}87$	13,00	14,25	15,00	17,45

und in Abb. 8 graphisch als Funktion des Ungleichförmigkeitsgrades ν dargestellt.

Wie man aus letzterer erkennt, steigt $\delta_{2\,\min}$ mit wachsendem ν und wird für die betrachteten Belastungsweisen bei völliger Entlastung einer Blechhälfte am größten. Während für $\nu = 0$ $\delta_{\min} = \pi^2 = 9{,}87$ steigt es im letzterem Falle bis auf 17,45. Bei festgehalten gedachter maximaler Druck-

Abb. 8

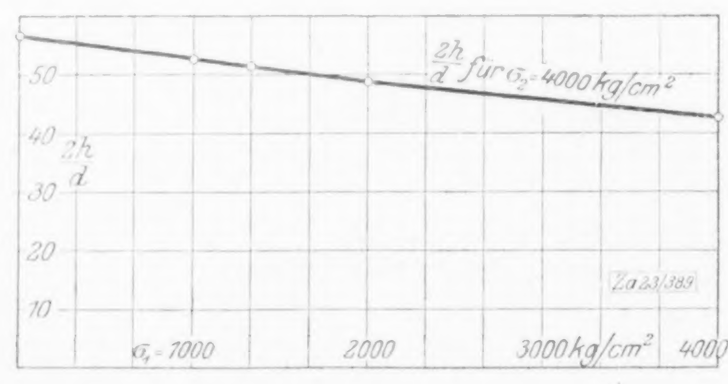


Abb. 8a

beanspruchung einer Blechhälfte, etwa II (vergl. Abb. 4), darf die Stärke des gänzlich unausgesteiften Bleches um so geringer werden, je mehr ν wächst und damit die Belastung der anderen Hälfte abnimmt.

In Abb. 8a sind die mit vorstehenden Werten von $\delta_{2_{\min}}$ sich ergebenden Grenzwerte von $\frac{\text{Plattenstärke}}{\text{Plattenhöhe}}$ für den Fall angegeben:

$$\sigma_2 = 4000\ \mathrm{kg/cm^2};\ \sigma_1 = 0,\ 1000,\ 2000,\ 3000,\ 4000\ \mathrm{kg/cm^2},$$

d. h. für den Fall vierfacher Knicksicherheit bei 1000 kg/cm² zulässiger Beanspruchung; aus der Abbildung läßt sich entnehmen, daß unter vorstehender Voraussetzung und für die betrachteten Belastungsweisen für die deutschen Normalprofile mit $\frac{2h}{d} \leq \sim 30$ die Knicksicherheit des Steges keinerlei Aussteifungen erfordern würde, selbst wenn von dem die Sicherheit erhöhenden Einfluß der Einspannung des Steges in den Flanschen abgesehen wird; unter Berücksichtigung dieses günstigen Einflusses, dessen Wirkung im Bryanschen Fall genau verfolgt werden kann und bei exzentrischer Belastung ähnlich sein wird, läßt sich dies auch von den dünnstegigen Differdinger Profilen sagen, bei denen $\frac{2h}{d}$ bis auf ~ 55 steigt.

Die vorstehenden Untersuchungen zeigen, daß bei genieteten Trägern durch exzentrische Achsialbelastung die Knicksicherheit des Stegblechs beträchtlich herabgemindert werden kann, und daß bei der Bemessung des Abstandes der Aussteifungen besondere Vorsicht geboten ist, wenn solche Belastungsarten oder ähnliche — wie z. B. die hier nicht behandelte, einer späteren Arbeit vorbehaltene negative (Zug-) Belastung einer Blechhälfte — im Bereich der Möglichkeit liegen. 347

Das Umstülpen und Umkippen von elastischen Ringen.

Von **R. GRAMMEL** in Stuttgart[1]).

Wenn man einen wulstförmigen Gummiring umzustülpen, d. h. seinen innersten Parallelkreis nach außen und seinen äußersten nach innen zu bringen sucht, so bemerkt man einen elastischen Widerstand, der offenbar davon herrührt, daß die Längsfasern des Ringes dabei teils verkürzt, teils verlängert werden müssen. Die Theorie dieser Erscheinung läßt sich unter gewissen, in der Elastizitätslehre auch sonst üblichen Annahmen verhältnismäßig einfach entwickeln und wird im folgenden für die beiden Fälle durchgeführt, daß das Umstülpmoment entweder sich auf den ganzen Ringumfang gleichmäßig verteilt (I. Abschnitt) oder nur in einzelnen, zyklisch symmetrischen Meridianschnitten des Ringes angreift (II. Abschnitt). Anstatt durch Drehmomente in den Meridianschnitten kann man die Umstülpung auch durch radial wirkende Kräfte hervorrufen. Hierbei ist besonders bemerkenswert der Fall, daß ein Ring mit einer äquatorialen Symmetrieebene längs seines inneren oder äußeren Aequators durch Radialkräfte, welche den Ring zu erweitern bezw. zu verengern streben, beansprucht wird; es zeigt sich nämlich, daß, sobald diese Kräfte ein gewisses Maß überschreiten, die ungestülpte Ringform labil wird und eine mehr oder weniger vollständige Umstülpung eintritt, welche offenbar in die Klasse der vom geraden Stab her bekannten Kipperscheinungen fällt. Die an Gummikörpern leicht zu bestätigende Theorie dieser Ringkippungen, deren Mannigfaltigkeit etwas größer ist, als man von vornherein erwartet, wird für ein gleichmäßiges Kraftfeld zu erledigen sein (III. Abschnitt), wogegen der wesentlich umständlichere Fall, daß die Kräfte einzeln um den Aequator verteilt sind, an anderer Stelle behandelt werden soll. Einige technischen Anwendungen der gefundenen Ergebnisse mögen später folgen.

Erster Abschnitt. Gleichmäßige Umstülpung.

1. Die neutrale Faser. Es handle sich um einen elastischen Ring, der seiner geometrischen Form nach durch Drehung eines ebenen Flächenstückes F als seines Meridianschnittes um die Achse AA entstanden ist (Abb. 1). In der betrachteten Meridianebene sei ein beliebiger Punkt O mit dem Achsenabstand R als Ursprung eines in der

[1]) Vorgetragen auf der Marburger Versammlung am 24. September 1923.

Zeichenebene festen kartesischen Koordinatensystems x, y gewählt. Vor der Umstülpung soll O zugleich der Pol eines im Meridianschnitt festen, also später sich mitumstülpenden Polarkoordinatensystems r, φ sein. Die mit dem Strahl $\varphi = 0$ zusammenfallende positive x-Achse weise senkrecht von der Ringachse AA fort, die y-Achse sei somit zur Ringachse parallel, der Winkel φ werde positiv gerechnet im Sinne derjenigen Drehung, die die positive x-Achse auf kürzestem Wege in die positive y-Achse überführt.

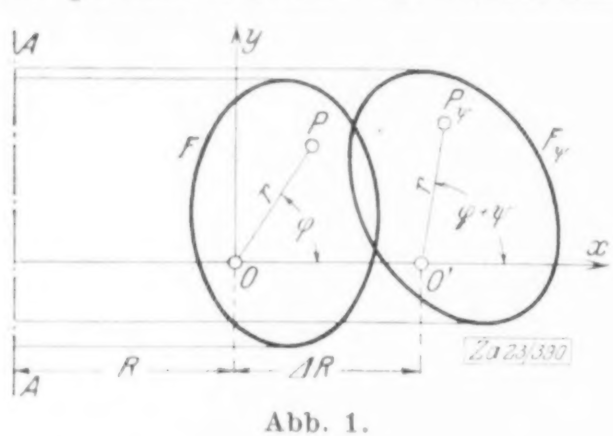


Abb. 1.

Es möge angenommen werden, daß bei der Umstülpung des Ringes sämtliche Meridianschnitte F sich selbst unverformt kongruent bleiben, d. h. daß man von der in Wirklichkeit unvermeidbaren Querdehnung bezw. Querzusammenziehung der Längsfasern und der hierdurch verursachten Verformung der Querschnitte des Ringes absehen darf. Dann kann die Fläche F bei der Umstülpung nur eine Parallelverschiebung und eine Drehung ψ in die neue Lage F_ψ erfahren. Die Drehung ψ werde positiv im Sinne wachsender φ gezählt. Von der Parallelverschiebung braucht offensichtlich nur die Komponente senkrecht zur Ringachse AA in Betracht gezogen werden; sie sei durch die Abszissenvergrößerung ΔR gemessen, welche der Punkt O bei der Verformung erhält, indem er in den Punkt O' übergeht. Bei der **gleichmäßigen** Umstülpung, die zunächst in Frage steht, hat ψ in allen Meridianschnitten den gleichen Wert und ebenso auch ΔR.

Die Ringfaser, welche den Querschnitt F im Punkte P mit den Koordinaten x, y oder r, φ senkrecht durchsetzt, hat ursprünglich den Halbmesser

$$\varrho = R + r \cos \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1),$$

welcher durch die Verformung um

$$\Delta \varrho = \Delta R + r[\cos(\varphi + \psi) - \cos \varphi] = \Delta R - x(1 - \cos \psi) - y \sin \psi \quad . \quad (2)$$

zunimmt, und erleidet bei der Umstülpung eine — als Zug positiv gerechnete — Spannung

$$\sigma = E \frac{\Delta \varrho}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3),$$

wenn E den Elastizitätsmodul des Stoffes bedeutet.

Setzt man voraus, daß der Ring ohne Eigenspannungen war, und daß an der Verformung keinerlei Einzelkräfte, vielmehr nur Kräftepaare in den einzelnen Meridianebenen beteiligt sind, so muß die Resultante sämtlicher Spannungen σ des Schnittes F_ψ verschwinden:

$$\int_{F_\psi} \sigma \, dF = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4),$$

unter dF den Querschnitt der zugehörigen Faser verstanden. Man kann dieser Bedingung die Form geben

$$A \Delta R = B(1 - \cos \psi) + C \sin \psi \quad \ldots \ldots \ldots (5),$$

wenn man die nur von Gestalt und Lage des unverformten Meridianschnittes F abhängigen Integrale

$$A = \int_F \frac{dF}{\varrho} \qquad B = \int_F \frac{x\,dF}{\varrho} \qquad C = \int_F \frac{y\,dF}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

einführt.

Ist der Punkt O so gewählt — was offenbar stets möglich ist —, daß die Integrale B und C verschwinden, so wird für alle Umstülpwinkel ψ die Verschiebung $\Delta R = 0$. Dieser Punkt heiße der **neutrale Punkt** des Querschnittes.

Bei der gleichmäßigen Umstülpung besteht die Verformung jedes Meridianschnittes in einer reinen Drehung um den neutralen Punkt.

Da der neutrale Punkt unabhängig vom Umstülpwinkel ψ in allen Meridianschnitten dieselbe Lage hat, so bildet die Gesamtheit der neutralen Punkte die **neutrale Faser** des Ringes.

Die Koordinaten des neutralen Punktes O sind

$$x_0 = \frac{B}{A} \qquad y_0 = \frac{C}{A} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7).$$

Denn diese Werte, für x und y in (2) eingesetzt, bringen $\Delta\varrho$ gemäß (5) zum Verschwinden. Man kann sich die Koordinaten (7) leicht veranschaulichen, indem man aus der Fläche F eine neue Fläche F' — sie möge die Verwandelte von F genannt sein — dadurch ableitet, daß man die Fläche F in lauter schmale Streifen parallel zur y-Achse zerlegt und jeden Streifen von seiner Mitte aus nach seinen beiden Enden hin im Verhältnis $1:\varrho$ verkürzt oder verlängert, je nachdem ϱ größer oder kleiner als 1 ist, so daß also die Verwandelte F' eine Fläche wird, die mit F alle Streifenmitten gemeinsam hat, aber in der y-Richtung allenthalben $1/\varrho$ mal so breit wie F ist. Alsdann sind x_0 und y_0 die Koordinaten des Schwerpunktes von F', und es gilt:

Der neutrale Punkt ist der Schwerpunkt der Verwandelten F' des Ringquerschnittes F.

Hieraus folgt weiter: Der neutrale Punkt liegt näher bei der Ringachse als der Querschnittsschwerpunkt. Besitzt der Ring eine äquatoriale (d. h. zur Ringachse senkrechte) Symmetrieebene, so enthält diese die neutrale Faser.

Abb. 2

Diese Sätze reichen zur bequemen Auffindung des neutralen Punktes, etwa mit graphischen Methoden, aus; bei einfachen Querschnitten kann der neutrale Punkt auch unmittelbar errechnet werden[1]). So findet man beispielsweise für einen Rechteckswulst mit den Maßen von Abb. 2 als Abstand R des neutralen Punktes O_0 von der Ringachse AA

$$R = \frac{h}{\ln\left(1 + \frac{h}{a}\right)}$$

oder, wenn der Quotient h/a hinreichend klein ist, genähert

$$R \simeq \left(a + \frac{h}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{12}\frac{h^2}{a^2}\right),$$

ohne weiteres vergleichbar mit dem Abstand $a + h/2$ des Rechtecksschwerpunktes von der Ringachse. Desgleichen ist für einen Kreiswulst mit den in Abb. 3 eingezeichneten Maßen

$$R = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right)$$

oder genähert bei genügend kleinen Werten von b/a

$$R \simeq a\left(1 - \frac{1}{4}\frac{b^2}{a^2}\right).$$

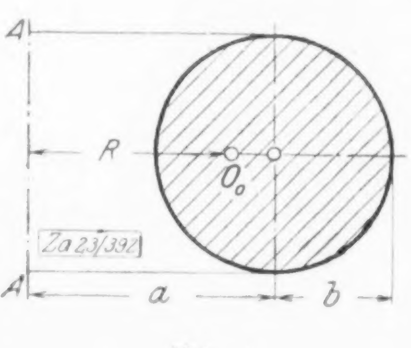


Abb. 3

2. Der neutrale Kegel. Als Koordinatenursprung soll fortan der neutrale Punkt O_0 gewählt sein. Dann läßt sich die Verteilung der Spannungen σ im verformten Querschnitt F_ψ übersichtlich angeben. Man erhält nämlich aus (1) bis (3) mit $\Delta R = 0$

$$\frac{\sigma}{E} = -\frac{x(1-\cos\psi) + y\sin\psi}{R + x} \quad \ldots\ldots\ldots\ (8)$$

oder

$$x\left(\frac{\sigma}{E} + 1 - \cos\psi\right) + y\sin\psi + \frac{\sigma}{E}R = 0 \quad \ldots\ldots\ (9).$$

Die Kurven gleicher Spannung σ, im unverformten Querschnitt F aufgetragen, sind somit Gerade, welche sämtlich durch den auf der Ringachse AA liegenden Punkt

$$x_1 = -R, \qquad y_1 = R\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}$$

hindurchgehen. Dieses Ergebnis bedeutet, auf den verformten Ring übertragen:

[1]) Für das auch in der Theorie der Biegung krummer Stäbe auftretende Integral B sind rechnerische und graphische Methoden, die sich leicht auf A und C sowie die späteren Integrale a_1, a_2, a_3 erweitern lassen, vielfach entwickelt worden, so schon von F. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit, Berlin 1878, S. 254; man vergleiche auch A. Bantlin, Zeitschr. d. V. d. Ing. 45 (1901) S. 164, sowie M. Tolle, daselbst 47 (1903) S. 884, und C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 8. Aufl., Berlin 1920, S. 516.

Die Flächen gleicher Faserspannung σ sind konzentrische Kreiskegel mit der Achse AA und der gemeinsamen Spitze im Achspunkt $y_2 = -R \operatorname{tg} \psi/2$. Derjenige dieser Kegel, der durch die neutrale Faser geht, enthält lauter spannungslose Fasern; er heiße der neutrale Kegel. Die Erzeugenden des neutralen Kegels bilden mit der Ringachse den Winkel $90 - \psi/2$; sie drehen sich um ihren neutralen Punkt halb so schnell, als der Querschnitt F_ψ sich bei der Umstülpung dreht. Dem Innenraum des neutralen Kegels gehört der Bereich der Druckspannungen an, seinem Außenraum der Bereich der Zugspannungen.

Da der neutrale Kegel sich während der Umstülpung fortwährend ändert, so gibt es zwar in jedem Augenblicke unendlich viele spannungslose Fasern; aber nur eine einzige ist dauernd spannungsfrei, eben die neutrale Faser durch O_0.

3. Das Umstülpmoment. Denkt man sich durch zwei aufeinanderfolgende Meridianebenen, welche den Winkel $d\vartheta$ miteinander bilden, ein Element aus dem Ringe herausgeschnitten, und ist $\mathfrak{M}\, d\vartheta$ das auf dieses Stück entfallende Umstülpmoment, positiv gerechnet, wenn es im Sinne wachsender ψ wirkt, so erfordert das Gleichgewicht dieses Elementes, daß

$$\mathfrak{M} = -\int\limits_{F_\psi} \sigma\, r \sin(\varphi + \psi)\, dF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

sei. Denn die Kräfte $\sigma\, dF$, welche an den Enden des durch P (Abb. 1) gehenden Faserelementes angreifen, haben eine radiale Resultante $\sigma\, dF\, d\vartheta$, positiv in der negativen x-Richtung, so daß der Integrand in (10) das Moment dieser Resultante inbezug auf den Koordinatenanfangspunkt (bis auf einen wegfallenden Faktor $d\vartheta$) darstellt.

Es wird hierbei übrigens die schon durch die ursprünglichen Annahmen (vergl. **1.**) bedingte Voraussetzung gemacht, daß das äußere Moment den inneren Momenten $\sigma r \sin(\varphi + \psi)\, dF$ wirklich so das Gleichgewicht halten könne, daß die verformten Querschnitte F_ψ den unverformten F kongruent bleiben, eine Voraussetzung, die etwa der in der elementaren Biegungstheorie üblichen entspricht, daß die Querschnitte eines Balkens sich unter dem Einfluß einer kontinuierlichen Belastung nicht ändern sollen.

Die Größe $\mathfrak{M}$ ist natürlich die algebraische Summe der Umstülpmomente, welche auf die Einheit des Winkels ϑ entfallen. Ihr Wert wird durch Ausrechnen der rechten Seite von (10) auf Grund von (8) gewonnen, wobei man zweckmäßig überall die Koordinaten x, y der Punkte des unverformten Querschnittes einführt. Man findet

$$\mathfrak{M} = [a_2 + (a_1 - a_2)\cos\psi]\sin\psi + a_3(\cos\psi - \cos 2\psi) \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

mit den Abkürzungen

$$a_1 = E\int\limits_F \frac{y^2\, dF}{\varrho}, \qquad a_2 = E\int\limits_F \frac{x^2\, dF}{\varrho}, \qquad a_3 = E\int\limits_F \frac{xy\, dF}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Das zweite der drei mit E multiplizierten Integrale ist das Flächenträgheitsmoment der ersten Verwandelten F' inbezug auf die y-Achse; das dritte Integral ist ebenso das Zentrifugalmoment von F'. Das erste Integral kann man veranschaulichen, wenn man von jedem der zur Erzeugung der Verwandelten F' benutzten Streifen den Trägheitsarm $\varkappa$ inbezug auf die x-Achse ermittelt und die Verkürzung (Verlängerung) des Streifens im Verhältnis $1 : \varrho$ so vornimmt, daß dabei der Trägheitsarm $\varkappa$ des Streifens nicht geändert wird. So entsteht eine zweite Verwandelte F'' von F, und das erste Integral ist dann einfach das Flächenträgheitsmoment von F'' inbezug auf die x-Achse. Es sei daran erinnert, daß die Koordinatenachsen hierbei durch den neutralen Punkt O_0 gehen müssen.

Die Größen a_1 und a_2 können nie null werden, wogegen a_3 beispielsweise für Ringe mit einer äquatorialen Symmetrieebene verschwindet. Allgemein mögen Ringe von solcher Gestalt, daß $a_3 = 0$ ist, symmetrieartig heißen.

In den technisch wichtigen Fallen handelt es sich fast stets nur um kleine Umstülpwinkel ψ, und hierfür kann man statt (11) schreiben

$$\mathfrak{M} = a_1\psi + \frac{3}{2}a_3\psi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

oder meist noch kürzer [1]

$$\mathfrak{M} = a_1\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

[1]) Eine mit (14) wesensgleiche, also für sehr schwache Umstülpung gültige Formel hat schon M. Westphal, Zeitschr. d. V. d. Ing. 41 (1897), S. 1036, anläßlich einer Untersuchung über die Berechnung von Flanschen entwickelt.

4. Freie Gleichgewichtsformen. Es erhebt sich die Frage, ob der Ring außer seiner natürlichen (spannungslosen) Gleichgewichtslage $\psi = 0$ umgestülpte Lagen $\psi \neq 0$ besitzt, in denen er trotz der dann vorhandenen inneren Spannungen ohne Umstülpmoment im Gleichgewicht verharrt. Solche Lagen sollen freie Gleichgewichtsformen des Ringes genannt sein. Aus (11) geht zunächst hervor:

Für symmetrieartige Ringe und nur für solche ist auch die vollständig umgestülpte Form ($\psi = 180^0$) eine freie Gleichgewichtsform.

Sie ist offenbar stabil oder labil, je nachdem für sie die erste Ableitung $d\mathfrak{M}/d\psi$ positiv oder negativ wird; falls $d\mathfrak{M}/d\psi$ daselbst Null ist, so entscheidet in gleicher Weise das Vorzeichen der dritten Ableitung. Da bei symmetrieartigen Ringen die erste Ableitung für $\psi = 180^0$ den Wert $a_1 - 2\,a_2$ und, falls $a_1 = 2\,a_2$ ist, die dritte den Wert $-3\,a_2$ annimmt, so gilt: Die vollständig umgestülpte Form eines symmetrieartigen Ringes ist stabil, wenn $a_1 > 2\,a_2$ bleibt, und labil, wenn $a_1 \leqq 2\,a_2$ ist.

Beispielsweise besitzt der Rechteckswulst von Abb. 2 nur dann nach vollständiger Umstülpung Stabilität, wenn er breit genug ist, nämlich wenn

$$b^2 > \frac{24\,h}{\ln\left(1+\dfrac{h}{a}\right)}\left[a + \frac{h}{2} - \frac{h}{\ln\left(1+\dfrac{h}{a}\right)}\right]$$

bleibt, wofür man angenähert auch schreiben darf

$$b > h\sqrt{2}\,,$$

falls a groß gegen h ist. Ein vollständig umgestülpter Kreiswulst verharrt in seiner Form nie stabil.

Ferner folgt aus (11):

Symmetrieartige Ringe, für welche $a_1 > 2\,a_2$ bleibt, besitzen noch genau zwei weitere — stets labile — freie Gleichgewichtsformen mit den Umstülpwinkeln

$$\psi = \pm \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{a_2}{a_1 - a_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

deren absolute Beträge zwischen 90^0 und 180^0 liegen.

Untersucht man, in welchen Bereichen die Nullstellen der rechten Seite der Gl. (11) für $a_3 \neq 0$ liegen können, so erkennt man: Nichtsymmetrieartige Ringe besitzen außer $\psi = 0$ immer mindestens noch eine und höchstens noch drei weitere freie Gleichgewichtsformen; und zwar liegt der Umstülpwinkel ψ_1 der stets vorhandenen Gleichgewichtsform zwischen 90^0 und 180^0 oder zwischen -90^0 und -180^0, je nachdem a_3 positiv oder negativ ist. Die Umstülpwinkel ψ_2 und ψ_3 der etwa noch weiter vorhandenen beiden Gleichgewichtslagen liegen im ersten Falle zwischen 0^0 und -180^0, im zweiten Falle zwischen 0^0 und $+180^0$.

Endlich darf man aus der Tatsache, daß die Funktion $d\mathfrak{M}(\psi)/d\psi$ zwischen zwei aufeinander folgenden Nullstellen von $\mathfrak{M}(\psi)$ stets eine oder drei Nullstellen (Vorzeichenwechsel) aufweist, den Schluß ziehen:

Die freie Gleichgewichtsform ψ_1 des nicht symmetrieartigen Ringes ist immer labil. Von den etwa noch vorhandenen freien Gleichgewichtsformen ψ_2 und ψ_3 ist diejenige mit dem absolut genommen kleineren Umstülpwinkel ebenfalls immer labil, diejenige mit dem absolut genommen größeren dagegen stabil, wenn ψ_2 und ψ_3 verschieden sind; fallen sie zusammen, so ist die Gleichgewichtsform labil.

Zweiter Abschnitt. Umstülpung durch Einzelmomente.

5. Die Verformung des Ringes. Es mögen nun die Umstülpmomente nicht mehr stetig über den Ring verteilt sein, sondern nur noch in einzelnen Meridianebenen wirken. Diese Meridianebenen sollen in gleichen Winkelabständen

$$2\,\vartheta_0 = \frac{2\,\pi}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

auf einander folgen, wo n eine ganze Zahl, und zwar mindestens 2 ist. Die Umstülpmomente seien alle gleich groß; ihr Betrag werde mit $2\,\mathfrak{M}_0$ bezeichnet, und sie seien als Vektoren je im Sinne einer Rechtsschraube senkrecht auf ihrer Meridianebene dargestellt (Abb. 4). Eine dieser Meridianebenen soll das Azimut $\vartheta = 0$ besitzen. Denkt

man sich ein Ringstück zwischen dieser Ebene und der Meridianebene $\vartheta = 2\,\vartheta_0$ herausgeschnitten, so hat man sich an seinen beiden Schnittflächen je die Hälfte der Umstülpmomente, also je Momente vom Betrage $\mathfrak{M}_0$ angebracht zu denken; die anderen Hälften gehören dann je den Nachbarringstücken zu. Diese Nachbarstücke üben vor dem Durchschneiden auf das herauszuschneidende Stück Biegungsmomente aus, deren Komponenten in Richtung der Ringachse AA mit $\mathfrak{M}_1$ bezeichnet werden, wogegen ihre zur Ringachse senkrechte Komponente $\mathfrak{M}_2$ heiße.

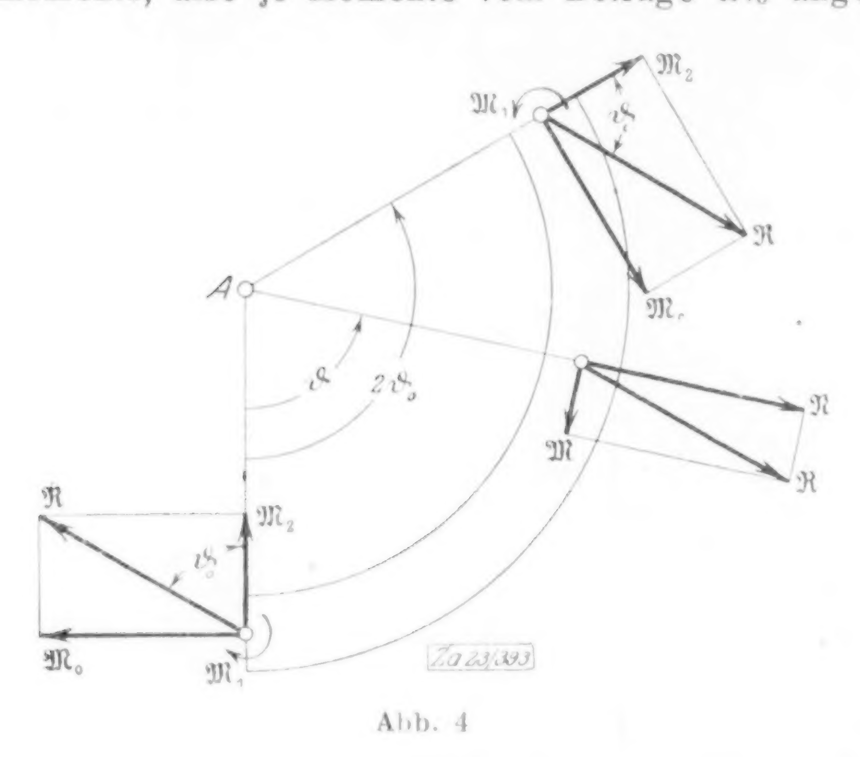


Abb. 4

Das Gleichgewicht erfordert, daß die Resultante $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{M}_2$ an beiden Enden des Ringstückes ein Vektor vom Azimut ϑ_0 ist, weshalb

$$\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_0 \operatorname{ctg} \vartheta_0 \quad . \quad . \quad (17)$$

wird, während die Komponente $\mathfrak{M}_1$ vorerst noch unbekannt bleibt. Der Vektor $\mathfrak{R}$, vom Ende $\vartheta = 2\,\vartheta_0$ in irgend einen Meridianschnitt ϑ zwischen den beiden Enden des Ringstückes verpflanzt, hat als Komponenten ein Drillungsmoment

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{R} \sin(\vartheta - \vartheta_0) = \mathfrak{M}_0 \frac{\sin(\vartheta - \vartheta_0)}{\sin \vartheta_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

und ein Biegungsmoment

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{R} \cos(\vartheta - \vartheta_0) = \mathfrak{M}_0 \frac{\cos(\vartheta - \vartheta_0)}{\sin \vartheta_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Dabei ist $\mathfrak{M}$ positiv im Sinne wachsender ψ gezählt, wogegen dem Vektor $\mathfrak{N}$ ein positiver Betrag zugeschrieben wird, wenn er senkrecht von der Ringachse AA wegweist. Außerdem muß man sich im Meridianschnitt ϑ noch das Moment $\mathfrak{M}_1$ denken; dieses sei positiv im Sinne wachsender ϑ gerechnet.

Es werde bis auf weiteres vorausgesetzt, das der Ringdurchmesser so groß gegenüber den Querschnittsmaßen ist, daß man die für »schwach gekrümmte« Balken übliche Näherungstheorie auf ihn anwenden darf. Da man dann insbesondere auch in (1) die Größe $r \cos \varphi$ gegen R wird streichen können, solange der Ursprung O des früher benutzten Koordinatensystems (Abb. 1) innerhalb des Querschnittes F liegt, so folgt aus (6) und (7), daß der neutrale Punkt O_0 vom Schwerpunkt S der Fläche F nicht mehr merklich zu unterscheiden ist. Man lege von ihm aus (Abb. 5), außer dem in der Zeichenebene festen alten xy-System ein im Querschnitt festes neues kartesisches $\xi\eta$-System derart an, daß die neuen Achsen mit den zunächst als unterscheidbar vorausgesetzten Hauptträgheitsachsen des Querschnittes F zusammenfallen und aus den alten vor der Umstülpung durch eine Drehung um den allen Querschnitten gemeinsamen spitzen Winkel λ im Sinne positiver ψ hervorgehen. Nach der Umstülpung, die jetzt für die verschiedenen Meridianschnitte ϑ i. a. verschieden groß sein wird, ist dieser Winkel gleich $\lambda + \psi$, also i. a. ebenfalls von Querschnitt zu Querschnitt ein anderer. Uebrigens mögen der positive Drehsinn des Azimutes ϑ und die positive y-Achse zusammen eine Rechtsschraube bilden.

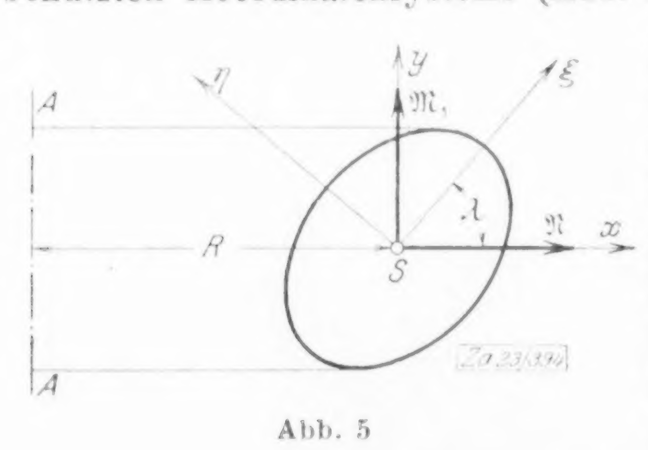


Abb. 5

Die Mittellinie des Ringes, d. h. der Ort der Flächenschwerpunkte S, wird bei der Umstülpung möglicherweise zu einer Raumkurve verbogen. Deren Krümmung soll als Vektor $\mathfrak{k}$ in der Binormale so aufgetragen werden, daß seine Richtung zu einer Rechtsschraube ergänzt wird vom Umlaufssinn eines Rades, das in der Schmiegungsebene auf der konvexen Seite der Kurve in der Richtung wachsender ϑ abrollt. Die Komponenten k_ξ bezw. k_η von $\mathfrak{k}$ in der ξ- bezw. η-Achse stellen die Krümmungen der Projektionen

der Raumkurve auf die $\eta\zeta$- bezw. $\xi\zeta$-Ebene dar, unter ζ eine Achse in Richtung der Kurventangenten verstanden. Die ursprüngliche Krümmung $1/R$ der Ringmittellinie ist ein Vektor, der in die Richtung der positiven y-Achse fällt. Mithin sind die Komponenten der durch die Umstülpung hervorgerufenen Krümmungsänderung am Azimut ϑ

$$\Delta k_\xi = k_\xi - \frac{\sin\lambda}{R}, \qquad \Delta k_\eta = k_\eta - \frac{\cos\lambda}{R}.$$

Nach der Theorie der schwach gekrümmten Stäbe entstehen aus diesen Krümmungsänderungen durch Multiplikation mit den zugehörigen Biegungssteifigkeiten

$$\alpha_1 = E\int \eta^2\, dF, \qquad \alpha_2 = E\int \xi^2\, dF \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

die Biegungsmomente; und da diese durch die entsprechenden Komponenten von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{N}$ hervorgerufen sind, so kommt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 \sin(\lambda+\psi) + \mathfrak{N}\cos(\lambda+\psi) &= \alpha_1\, \Delta k_\xi = \alpha_1\left(k_\xi - \frac{\sin\lambda}{R}\right) \\ \mathfrak{M}_1 \cos(\lambda+\psi) - \mathfrak{N}\sin(\lambda+\psi) &= \alpha_2\, \Delta k_\eta = \alpha_2\left(k_\eta - \frac{\cos\lambda}{R}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (21).$$

Es ist wichtig, zu bemerken, daß hierbei außer den Biegungsspannungen im engeren Sinne (d. h. den Spannungen, welche dieselbe Biegung des Ringes, jedoch ohne Umstülpung, hervorbrächten) auch die Umstülpungsspannungen (8) bereits berücksichtigt sind. In der Tat würden aus den Biegungsspannungen im engeren Sinne

$$\sigma' = -E\,\eta\left[k_\xi - \frac{\sin(\lambda+\psi)}{R}\right], \qquad \sigma'' = E\,\xi\left[k_\eta - \frac{\cos(\lambda+\psi)}{R}\right]$$

zusammen mit den Umstülpspannungen, die innerhalb der gesteckten Genauigkeitsgrenzen durch

$$\sigma''' = -\frac{E}{R}\left[x\,(1-\cos\psi) + y\sin\psi\right]$$

dargestellt sind, durch Summierung $\sigma' + \sigma'' + \sigma''' = \sigma$ im Ganzen die Momente $-\int \sigma\eta\, dF$ und $+\int \sigma\xi\, dF$ entstehen, welche mit den rechten Seiten von (21) gleich sind. Wir verzichten darauf, die einfache Rechnung hierfür anzuschreiben; diese würde zugleich Aufschluß über die Frage nach der Spannungsverteilung im Querschnitt geben. Diese Verteilung ist, wie man von vornherein sagen kann, linear, weil die Gesamtspannung σ ja aus den Spannungen σ', σ'' und σ''' zusammengesetzt ist, welche je einem linearem Verteilungsgesetz gehorchen.

Die Krümmung der Projektion der Mittellinie des Ringes auf einen zum Ring koaxialen Zylinder, welcher von der mit wachsendem Azimut ϑ fortschreitenden ζ-Achse stets berührt wird, ist $k_1 = k_\xi\cos(\lambda+\psi) - k_\eta\sin(\lambda+\psi)$,

positiv gerechnet nach der Außenseite des Zylinders. Ebenso ist die Projektion der Mittellinie auf eine zur Ringachse senkrechte Ebene eine Kurve mit der Krümmung

$$k_2 = k_\xi\sin(\lambda+\psi) + k_\eta\cos(\lambda+\psi),$$

positiv gezählt in der Richtung der positiven y-Achse. Die Ausrechnung auf Grund von (21) ergibt

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\alpha_2\left(k_1 + \frac{\sin\psi}{R}\right) &= \mathfrak{N}\left[\alpha_1\sin^2(\lambda+\psi) + \alpha_2\cos^2(\lambda+\psi)\right] \\ &\quad - \mathfrak{M}_1(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\lambda+\psi)\cos(\lambda+\psi) \\ \alpha_1\alpha_2\left(k_2 - \frac{\cos\psi}{R}\right) &= \mathfrak{M}_1\left[\alpha_1\cos^2(\lambda+\psi) + \alpha_2\sin^2(\lambda+\psi)\right] \\ &\quad - \mathfrak{N}(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\lambda+\psi)\cos(\lambda+\psi) \end{aligned}\right\} \quad (22).$$

Unter der schon durch die bisherigen Annahmen bedingten Voraussetzung, daß die Abweichung der Ringmittellinie von der ursprünglichen Kreisform nur klein sei, hängen die Durchbiegung u, positiv in Richtung der positiven y-Achse, und die Verkürzung v des Ringhalbmessers R mit dem Azimut ϑ zusammen durch [1])

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} = R^2 k_1, \qquad \frac{d^2v}{d\vartheta^2} + v = R^2\left(k_2 - \frac{1}{R}\right) \quad \ldots\ldots \quad (23).$$

[1]) Ueber die zweite Formel (23) vergl. man die Lehrbücher der Elastizität, z. B. A. Föppl, Techn. Mechanik, Bd. III, § 38, oder H. Lorenz, Techn. Elastizitätslehre, S. 240.

Zur Integration dieser Gleichungen ist die Kenntnis der Abhängigkeit des Umstülpwinkels ψ vom Azimut ϑ erforderlich. Versteht man unter G den Schubmodul, unter J_0 den Drillungswiderstand und demgemäß unter

$$\gamma = G J_0 \qquad (24)$$

die Drillungssteifigkeit des Ringquerschnittes, so wird im Rahmen der bisherigen Voraussetzungen jene Abhängigkeit ausgedrückt durch die Gleichung

$$\frac{d\psi}{d\vartheta} = \frac{R\mathfrak{M}}{\gamma};$$

diese läßt sich vermöge (18) sofort integrieren in der Form

$$\psi = \psi_0 - \frac{R\mathfrak{M}_0}{\gamma \sin\vartheta_0}\left[\cos(\vartheta - \vartheta_0) - \cos\vartheta_0\right] \qquad (25),$$

wo ψ_0 der Umstülpwinkel in denjenigen Meridianebenen ist, in denen auch die Umstülpmomente selbst angreifen.

Durch die Verknüpfung der Gleichungen (22) und (25) mit den Gleichungen (23) ist die Berechnung der verformten Mittellinie auf lauter Quadraturen zurückgeführt. Die bis jetzt noch unbekannten Größen ψ_0 und $\mathfrak{M}_1$ bestimmen sich dann vollends mit Hilfe der Randbedingungen aus den Umstülpmomenten $\mathfrak{M}_0$. Statt solchen Randbedingungen kann man auch zweckmäßigerweise die Symmetriebedingungen

$$\left.\frac{du}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta_0} = 0, \qquad \left.\frac{dv}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta_0} = 0 \qquad (26)$$

wählen.

Die früher untersuchten freien Gleichgewichtsformen (vergl. **4.**) müssen natürlich als Partikulärlösungen herausschälbar sein. In der Tat bestätigt man, daß mit $\mathfrak{M}_0 = 0$ und also $\mathfrak{N} = 0$ sowie $k_1 = 0$ und $k_2 = 1/R$ die beiden Gleichungen (22)

$$\alpha_1\alpha_2 \sin\psi = -R\mathfrak{M}_1(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\lambda + \psi)\cos(\lambda + \psi)$$
$$\alpha_1\alpha_1(1 - \cos\psi) = R\mathfrak{M}_1\left[\alpha_1\cos^2(\lambda + \psi) + \alpha_2\sin^2(\lambda + \psi)\right]$$

durch Entfernen von $\mathfrak{M}_1$ eine Beziehung ergeben, in welcher man rasch die Bestimmungsgleichung für die freien Gleichgewichtslagen [vergl. (11)] erkennt, wenn man statt der Größen (12) ihre jetzigen Näherungswerte

$$a_1 = \frac{E}{R}\int y^2 dF, \qquad a_2 = \frac{E}{R}\int x^2 dF, \qquad a_3 = \frac{E}{R}\int xy\, dF \qquad (27)$$

setzt und beachtet, daß zwischen den a_i und den α_i die Identitäten gelten

$$a_1 R = \alpha_1\cos^2\lambda + \alpha_2\sin^2\lambda, \quad a_2 R = \alpha_1\sin^2\lambda + \alpha_2\cos^2\lambda, \quad a_3 R = (\alpha_2 - \alpha_1)\sin\lambda\cos\lambda \quad (28).$$

6. Schwache Umstülpung. Die durch das System (23) vorgeschriebenen Quadraturen werden besonders einfach in dem Falle, daß es sich nur um kleine Werte des Umstülpwinkels ψ handelt. Dann muß nämlich, wie aus (25) hervorgeht, auch der Ausdruck $R\mathfrak{M}_0/\gamma$ klein bleiben. Da weiterhin α_1, α_2 und γ von ungefähr gleicher Größenordnung zu sein pflegen, so sind gemäß (19) und der ersten Gleichung (22) die Quotienten

$$\frac{R\mathfrak{M}_1}{\alpha_1}, \qquad \frac{R\mathfrak{M}_1}{\alpha_2}, \qquad \frac{R\mathfrak{N}}{\alpha_1}, \qquad \frac{R\mathfrak{N}}{\alpha_2}$$

ebenfalls als kleine Zahlen anzusehen. Behandelt man sie, wie ψ, als klein von der ersten Ordnung, so lauten die Differentialgleichungen (23) nach Wegstreichen aller kleinen Glieder von der zweiten Ordnung mit Rücksicht auf (22), (25) und (19)

$$H\frac{d^2u}{d\vartheta^2} = K + L\cos(\vartheta - \vartheta_0), \quad H\left(\frac{d^2v}{d\vartheta^2} + v\right) = M + N\cos(\vartheta - \vartheta_0) \quad . \quad (29)$$

mit den schon gleich nach (28) geeignet umgeformten Beiwerten

$$\left.\begin{aligned} H &= \frac{\alpha_1\alpha_2}{R^3}, \quad K = \mathfrak{M}_1 a_3 - \frac{\alpha_1\alpha_2}{R^2}\left(\psi_0 + \frac{R}{\gamma}\mathfrak{M}_0\operatorname{ctg}\vartheta_0\right) \\ L &= \frac{\mathfrak{M}_0}{\sin\vartheta_0}\left(a_2 + \frac{\alpha_1\alpha_2}{R\gamma}\right), \quad M = \mathfrak{M}_1 a_1, \quad N = \frac{\mathfrak{M}_0}{\sin\vartheta_0}a_3 \end{aligned}\right\} \quad (30).$$

Die den Randbedingungen $du/d\vartheta = 0$ und $dv/d\vartheta = 0$ für $\vartheta = 0$ angepaßten ersten Integrale von (29)

$$H\frac{du}{d\vartheta} = K\vartheta + L\left[\sin(\vartheta - \vartheta_0) + \sin\vartheta_0\right]$$

$$H\frac{dv}{d\vartheta} = M\sin\vartheta + \frac{N}{2}\left[\vartheta\cos(\vartheta - \vartheta_0) + \sin\vartheta\cos\vartheta_0\right]$$

liefern mit den Symmetriebedingungen (26) die beiden Gleichungen

$$K\vartheta_0 + L\sin\vartheta_0 = 0, \qquad M\sin\vartheta_0 + \frac{N}{2}(\vartheta_0 + \sin\vartheta_0\cos\vartheta_0) = 0$$

zur Bestimmung von ψ_0 und $\mathfrak{M}_1$. Setzt man die Beiwerte aus (30) ein, so kommt durch Entfernen von $\mathfrak{M}_1$ aus beiden die Gleichung zustande

$$\psi_0 = \frac{R\,\mathfrak{M}_0}{\vartheta_0}\left[\frac{\varepsilon_1}{\gamma} + R\,\frac{a_1 a_2 - \varepsilon_2 a_3^2}{a_1 \alpha_1 \alpha_2}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

mit den Abkürzungen

$$\varepsilon_1 = 1 - \vartheta_0 \operatorname{ctg}\vartheta_0, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\vartheta_0}{2}\left(\frac{\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_0} + \operatorname{ctg}\vartheta_0\right) \quad \ldots \ldots \quad (32).$$

Wir verzichten darauf, ebenso auch den Wert von $\mathfrak{M}_1$ anzuschreiben.

Beachtet man schließlich, daß aus (28) folgt

$$R^2(a_1 a_2 - a_3^2) = \alpha_1 \alpha_2$$

und führt noch die Größe

$$c = \frac{\gamma}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

als Drillungszahl ein, so nimmt (31) die Gestalt an

$$\psi_0 = \frac{\mathfrak{M}_0}{\vartheta_0}\left[\frac{\varepsilon_1}{c} + \frac{1}{a_1}\,\frac{a_1 a_2 - \varepsilon_2 a_3^2}{a_1 a_2 - a_3^2}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34).$$

Der Zusammenhang zwischen dem Umstülpmoment $\mathfrak{M}_0$ und dem größten Umstülpwinkel ψ_0 ist mithin, wie für schwache Umstülpungen zu erwarten war, linear und abhängig von Biegungs- und Drillungssteifigkeit des Ringquerschnittes.

Für symmetrieartige Ringe (vergl. **3.**) insbesondere wird mit $a_3 = 0$

$$\psi_0 = \frac{\mathfrak{M}_0}{\vartheta_0}\left[\frac{\varepsilon_1}{c} + \frac{1}{a_1}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (35),$$

und zwar jetzt bemerkenswerterweise unabhängig von der zweiten Biegungssteifigkeit a_2, da nach (28) wegen $\lambda = 0$ auch noch $a_1 R = \alpha_1$ ist.

In der folgenden Tafel sind die Größen ε_1 und ε_2 und zum Vergleich mit ε_1 auch noch der Ausdruck $\frac{1}{3}\vartheta_0^2$ abhängig von der Zahl n der Umstülpmomente zusammengestellt.

n	ε_1	$\frac{1}{3}\vartheta_0^2$	ε_2	n	ε_1	$\frac{1}{3}\vartheta_0^2$	ε_2
2	1	0,822	1,234	6	0,093	0,091	1,002
3	0,396	0,366	1,033	7	0,069	0,067	1,001
4	0,215	0,206	1,010	:	:	:	:
5	0,135	0,132	1,003	∞	0	0	1

Beachtet man, daß nach (28) stets $a_1 a_2 > a_3^2$ ist, so kann man statt (34) einfachere Näherungsformeln angeben. Ist nämlich $n > 2$, so gilt bis auf einen Fehler von höchstens 3 vH die Formel (35) auch für nicht symmetrieartige Ringe, oder bis auf einen Fehler, der sich erst in der zweiten Dezimalstelle bemerklich macht,

$$\psi_0 = \mathfrak{M}_0\left[\frac{\vartheta_0}{3c} + \frac{1}{a_1\vartheta_0}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36).$$

Für $n = 2$ stellt die für symmetrieartige Ringe genaue Formel

$$\psi_0 = \frac{2}{\pi}\mathfrak{M}_0\left[\frac{1}{c} + \frac{1}{a_1}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

eine allerdings schlechtere Näherung auch für nichtsymmetrieartige Ringe vor.

Läßt man schließlich n über alle Grenzen wachsen, so kommt man wieder zu einem gleichmäßig umgestülpten Ringe zurück. Da das Moment $\mathfrak{M}_0$ auf den Winkel ϑ_0 entfällt, so hängt im Grenzfalle das frühere stetige Umstülpmoment $\mathfrak{M}$ mit dem jetzigen $\mathfrak{M}_0$ zusammen durch

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}\,\vartheta_0,$$

und damit geht dann wegen $\lim \varepsilon_1 = 0$, $\lim \varepsilon_2 = 1$ die Formel (34) in der Tat in (14) über.

Dritter Abschnitt. Gleichmäßige Umkippung.

7. Die Umkippung bei Innenpressung. Es handle sich fortan um einen Ring mit äquatorialer Symmetrieebene; sein innerer Aequator, genauer gesagt, ein schmaler Streifen, den der innere Aequator halbiert, sei durch eine stetige Folge gleichgroßer, radial auswärts gerichteter Kräfte belastet. Zwischen zwei Meridianebenen des Winkelabstandes $d\vartheta$ wirke die stets als positiv angesehene Kraft $P\,d\vartheta$, so daß also P die algebraische Summe der Kräfte ist, die auf die Einheit des Winkels ϑ entfallen. Man lege in einer als Zeichenebene gewählten Meridianebene (Abb. 6) von dem Durchstoßungspunkte O des inneren Aequators aus die wie früher orientierten Systeme x, y und r, φ. Der Punkt O rückt bei der Verformung durch die Kräfte P nach O', wobei sein Achsenabstand R um ΔR wächst. Außerdem tritt möglicherweise noch eine Drehung des Querschnittes um den Winkel ψ hinzu. Da bei gleichmäßiger Kraft P zweifellos eine Verformung denkbar ist, bei welcher die Größen ΔR und ebenso die Winkel ψ in allen Meridianschnitten je die gleichen Werte haben, so sei diese Gleichförmigkeit vorausgesetzt.

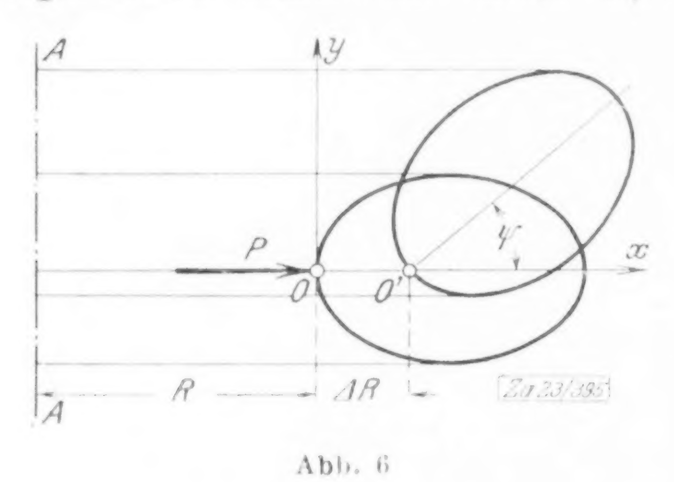


Abb. 6

Weiter soll die Annahme beibehalten werden, daß der unverformte und der verformte Querschnitt sich kongruent bleiben. Man kann die Genauigkeit dieser Annahme hier wenigstens insoweit nachprüfen, daß man beispielsweise die Dehnung eines flachen Ringes in Gestalt eines hohlen, senkrecht zu seinen Erzeugenden abgeschnittenen Kreiszylinders unter dem Einfluß konstanten Innendruckes nach bekannten Formeln streng ausrechnet und mit der im folgenden ermittelten Größe ΔR für fehlende Umstülpung vergleicht. Der Vergleich zeigt, daß die Radialdehnungen der einzelnen Fasern um so genauer als unter sich und mit ΔR gleich behandelt werden dürfen, je kleiner der Quotient aus der radialen Ringstärke h und dem Innenhalbmesser R ist. Beispielsweise bleibt für Stoffe mit der Querkontraktionsziffer 3,3 (Stahl) der Fehler schon kleiner als 3 vH, wenn h/R mindestens gleich 5 wird. Es ist anzunehmen, daß diese Fehlerabschätzung der Größenordnung nach auch noch bei hinzutretender Umstülpung richtig bleibt, und so wird es nicht nötig sein, die im vorigen Abschnitte gemachte Voraussetzung, daß h vernachlässigbar gegen R sein sollte, beizubehalten; immerhin ist bei der Anwendung der folgenden Ergebnisse auf sehr enge Ringe einige Vorsicht geboten.

Die ehemalige radiale Gleichgewichtsbedingung (4) eines zwischen zwei konsekutiven Meridianebenen liegenden Ringelementes ist jetzt zu ersetzen durch

$$\int_{F_\psi} \sigma\, dF = P \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (38),$$

die ehemalige Bedingung (10) für das Gleichgewicht der Momente durch

$$\int_{F_\psi} \sigma\, r \sin(\varphi + \psi)\, dF = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (39).$$

Führt man die neuen Abkürzungen

$$A_1 = E\int_F \frac{dF}{\varrho}, \qquad B_1 = E\int_F \frac{x\,dF}{\varrho}, \qquad J_1 = E\int_F \frac{y^2\,dF}{\varrho}, \qquad J_2 = E\int_F \frac{x^2\,dF}{\varrho} \quad . \quad (40)$$

ein, die sich von den ähnlichen Integralen (6) und (12) außer dem Faktor E durch andere Lage des Bezugspunktes O unterscheiden, und beachtet man, daß die Integrale

$$\int_F \frac{y\,dF}{\varrho} \qquad \int_F \frac{xy\,dF}{\varrho}$$

infolge der Symmetrie des Querschnittes verschwinden, so kann man den Bedingungen (38) und (39), wenn man sie nach (1) bis (3) ausrechnet, die Gestalt geben

$$A_1\,\Delta R + B_1 \cos\psi = P + B_1, \qquad [B_1\,\Delta R + (J_2 - J_1)\cos\psi]\sin\psi = J_2 \sin\psi \quad (41).$$

Aus diesen Gleichungen für die Unbekannten ΔR und ψ folgt entweder

$$\psi = 0 \text{ und } \Delta R = \frac{P}{A_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (42)$$

oder

$$\psi = \pm 180^0 \text{ und } \varDelta R = \frac{P + 2B_1}{A_1} \quad \text{. . . . . (43)}$$

oder ψ von 0^0 und $\pm 180^0$ verschieden und also

$$\left.\begin{aligned} \cos\psi &= 1 - \frac{B_1}{N}(P - P_k) = -1 + \frac{B_1}{N}(P_k^* - P) \\ \varDelta R &= \frac{P_k}{A_1} + \frac{J_2 - J_1}{N}(P - P_k) = \frac{P_k^* + 2B_1}{A_1} - \frac{J_2 - J_1}{N}(P_k^* - P) \end{aligned}\right\} \quad \text{. . (44)}$$

mit den Abkürzungen

$$N = A_1(J_2 - J_1) - B_1^2 \quad (45), \qquad P_k = \frac{A_1 J_1}{B_1} \quad (46), \qquad P_k^* = \frac{A_1}{B_1}(2J_2 - J_1) - 2B_1 \quad (47).$$

Die Weiterbehandlung der Lösung (44) hängt von dem Vorzeichen des Ausdruckes N ab. Der Ring soll flach, rundlich oder breit heißen, je nachdem N positiv, Null oder negativ ausfällt. Denn für sehr flache, d. h. in der y-Richtung wenig ausgedehnte Ringe ist J_2 viel größer als J_1 und also gewiß $N > 0$, wogegen $N < 0$ wird, wenn der Ring in der y-Richtung hinreichend breit und somit J_1 größer als J_2 ist. Bei einem Ringe von den Abmessungen der Abb. 2 beispielsweise wird $N \gtreqless 0$, je nachdem $h \gtreqless b$ ist, wenn man a als groß gegen h ansieht.

8. Flache Ringe. Gemäß $N > 0$ ist die Kraft P_k kleiner als die Kraft P_k^* und mithin die Lösung (44) reell in dem Bereiche

$$P_k \leq P \leq P_k^* \quad \text{. . . . . (48),}$$

wogegen die Lösungen (42) und (43) für alle (positiven) Werte von P zu Recht bestehen. Dem Kraftbereich (48) sind mithin drei mögliche Gleichgewichtslagen des Ringes zugeordnet, nämlich eine ungestülpte ($\psi = 0^0$), eine halbgestülpte oder gekippte ($0^0 < |\psi| < 180^0$) und eine ganzgestülpte ($\psi = \pm 180^0$); aber diese unterscheiden sich offenbar hinsichtlich der Stabilitätsverhältnisse.

Preßt man den Ring auseinander, indem man die Kraft P von Null an stetig wachsen läßt, so gilt zunächst die Lösung (42) der ungestülpten Form. Sobald P den kritischen Wert P_k erreicht hat, hört die Lösung (42) auf, einen stabilen Zustand auszudrücken, und beim Ueberschreiten des kritischen Wertes P_k kippt der Ring nach der einen oder anderen Seite um: es gilt jetzt die Lösung (44). Bei weiterem Anwachsen der Kraft wird die Umstülpung stärker, bis sie schließlich mit $P = P_k^*$ ganz vollzogen ist: von nun an gehört allein der Lösung (43) eine stabile Form des Ringes zu.

Entlastet man den Ring wieder, so verliert die Lösung (43) der ganzgestülpten Form beim Unterschreiten der kritischen Last P_k^* die Stabilität, und der Ring geht durch die gekippte Form (44) in die ungestülpte (42) zurück.

In Abb. 7 sind die Lösungen stabilen Charakters stark ausgezeichnet, diejenigen labilen Charakters gestrichelt.

Im Unterschiede vom geraden Balken gibt es demnach beim Ringe zwei Kipplasten (erster Ordnung), nämlich eine für wachsende Belastung und eine andere für abnehmende Belastung. Wie aus Abb. 7 ersichtlich, springt nach Ueberschreiten der unteren Kipplast P_k der Umstülpwinkel ψ von 0^0 fast plötzlich zu erheblichem Betrage, desgleichen beim Unterschreiten der unteren Kipplast P_k^* von $\pm 180^0$ fast plötzlich zu erheblich niedrigeren Beträgen. Man kann diese Erscheinung an flachen Gummiringen sehr deutlich beobachten.

Für den Rechteckswulst, Abb. 2, zum Beispiel werden die Kipplasten angenähert

$$P_k = \frac{E b^3}{6a}, \qquad P_k^* = \frac{E b}{6a}(2h^2 - b^2),$$

Abb. 7

wenn man wieder a als groß gegen h behandelt; bemerkenswerterweise ist hier P_k unabhängig von der Ringstärke h.

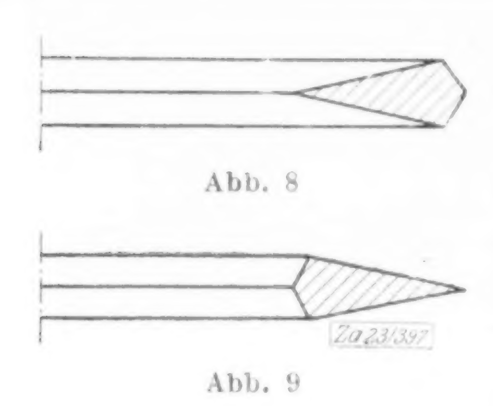

Abb. 8

Abb. 9

Aus (46) und (47) schließt man unschwer, daß beide Kipplasten gegen Null sinken, wenn der Ring ohne Veränderung des Außen- und Innenäquators flacher und flacher gemacht wird; ebenso daß die Kipplasten kleiner bezw. größer werden, wenn die Hauptmasse des Ringes weiter gegen den Außen- bezw. gegen den Innenäquator verlegt wird; so hat der Ring Abb. 8 kleinere Kipplasten als der Ring Abb. 9, wie auch der Versuch bestätigt.

9. Rundliche Ringe. Vermöge der die rundlichen Ringe kennzeichnenden Gleichung $N = 0$ wird jetzt gemäß (46) und (47) $P_k = P_k^*$, und außerdem sind dann die beiden Bestimmungsgleichungen (41) für ψ und ΔR identisch, nämlich

$$A_1 \Delta R - B_1 (1 - \cos \psi) = P_k \quad \ldots \ldots \ldots \quad (49).$$

Dies bedeutet, daß bei der kritischen Kraft $P = P_k$ der Umstülpwinkel beliebig zwischen den Grenzen -180^0 und $+180^0$ und ebenso die Größe ΔR zwischen den Grenzen

$$\frac{P_k}{A_1} \leq \Delta R \leq \frac{P_k + 2 B_1}{A_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (50)$$

schwanken kann, wobei zusammengehörige Werte von ψ und ΔR durch die Bedingung (49) verknüpft sind. Dies besagt:

Läßt man die Kraft P allmählich wachsen, so wird die Lösung (42) der ungestülpten Ringform von der Kipplast P_k an labil. Bei P_k kippt der Ring durch eine stetige Folge gestülpter Formen (49) von indifferentem Charakter in die ganzgestülpte Form um, und bei weiterem Anwachsen der Kraft P über P_k hinaus ist nur noch diese stabil. Entsprechendes gilt beim Entlasten des Ringes, wenn die Kraft ihren kritischen Wert durchschreitet.

Man kann den Zustand bei P_k natürlich ebenso gut auch als labil bezeichnen, insofern ja die geringste Veränderung der Kraft nach oben oder unten eine Kippung nach $\psi \pm 180^0$ oder zurück nach $\psi = 0^0$ zur Folge hat.

10. Breite Ringe. Sobald $N < 0$ ist, wird $P_k^* < P_k$, und nun ist die Lösung (44) gänzlich labil (Abb. 10). Dafür bleibt jetzt zwischen P_k^* und P_k sowohl die ungestülpte wie die ganz gestülpte Ringform stabil. Dies heißt:

Läßt man die Kraft P allmählich wachsen, so kippt der Ring beim Ueberschreiten der Kipplast P_k plötzlich in die ganz gestülpte Form über; entlastet man, so kippt er erst beim Unterschreiten der kleineren Kipplast P_k^* zurück, und zwar sogleich in die ungestülpte Form.

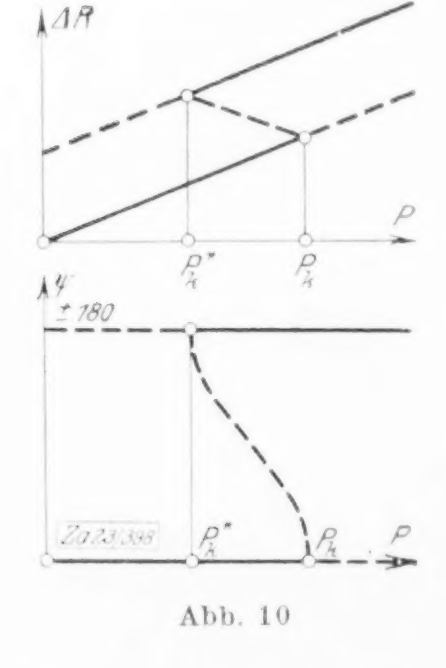


Abb. 10

Ist insbesondere der Ring hinreichend breit, d. h. ist der Ausdruck N so stark negativ, daß die Ungleichung

$$A_1 (J_2 - J_1) - B_1^2 < -(A_1 J_2 - B_1^2) \quad . \quad . \quad (51)$$

gilt, in welcher die rechtsseitige Klammer stets wesentlich positiv sein muß, so ist P_k^* negativ, und also kippt der ganz gestülpte Ring dann auch bei völliger Entlastung nicht mehr von selbst in die ungestülpte Form zurück: man hat es jetzt mit einem Ringe zu tun, der zwei stabile freie Gleichgewichtslagen ($\psi = 0^0$ und $\psi = \pm 180^0$) besitzt, wie sie bei hinreichend breiten Ringen schon früher (**4.**) gefunden wurden; die zu $P = 0$ gehörige labile Lösung (44) bedeutet dann die beiden ebenfalls bereits festgestellten labilen freien Gleichgewichtslagen. Es ist in der Tat nicht schwer, die Ungleichung (51) in die früher benutzte Gestalt $a_1 > 2 a_2$ überzuführen und auch für die labilen Formen den analytischen Anschluß an die frühere Lösung (15) herzustellen.

11. Die Umkippung bei Außenpressung. Der nach wie vor in bezug auf seine Aequatorebene symmetrische Ring möge schließlich von außen her durch eine stetige Folge gleichgroßer, radial einwärts gerichteter Kräfte längs seines äußeren Aequators belastet sein. Man ändert die Bezeichnungen jetzt zweckmäßig so ab, daß P

und ΔR positiv einwärts gerechnet werden, wählt ferner zum Ursprung O des Koordinatensystems den Durchstoßungspunkt des äußeren Aequators durch die Zeichenebene und läßt dann die positive x-Achse gegen die Ringachse hinzeigen. Hierdurch ändert sich, da außer x auch B_1 mit Vorzeichenwechsel zu versehen ist, an den Hauptgleichungen (41) nichts und also auch nicht an den aus ihnen gezogenen Folgerungen.

Allerdings sind wegen der Aenderung des Koordinatensystems die Größen B_1 und J_2 jetzt anders definiert als vorhin, so daß sie bei einem und demselben Ringe i. a. andere Werte als vorhin annehmen werden. Dasselbe gilt dann auch von den kritischen Belastungen. Ist nämlich h der radiale Abstand des Innen- und Außenäquators, so hängen die früheren Größen A_1 usw. mit den jetzigen (durch obere Striche gekennzeichneten) A'_1 usw. zusammen, wie folgt,

$$A'_1 = A_1\,, \qquad B'_1 = h A_1 - B_1\,, \qquad J'_1 = J_1\,, \qquad J'_2 = h^2 A_1 - 2 h B_1 + J_2\,,$$

und demgemäß sind die Kipplasten bei Außenpressung nach (46) und (47)

$$P_k' = \frac{A_1 J_1}{h A_1 - B_1}\,, \qquad P_k^{*\prime} = \frac{A_1 (2 J_2 - J_1) - 2 B_1^2}{h A_1 - B_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (52),$$

welche Werte sich von den früheren nur im Nenner unterscheiden. Dagegen ist der Ausdruck N wegen

$$A'_1 (J'_2 - J'_1) - B'^2_1 = A_1 (J_2 - J_1) - B_1^2$$

eine Invariante gegenüber dem vorgenommenen Koordinatenwechsel; und so dürfen die Begriffe des flachen, rundlichen und breiten Ringes unverändert beibehalten werden. Mithin ist festzustellen:

Bei Außenpressung zeigt der Ring dieselben Kipperscheinungen wie bei Innenpressung, jedoch mit Kipplasten, die sich zu denjenigen bei Innenpressung verhalten wie $B_1 : (h A_1 - B_1)$.

Setzt man mit einem Mittelwert x_0

$$B_1 = x_0 A_1\,,$$

so wird das genannte Verhältnis

$$\frac{P_k'}{P_k} = \frac{P_k^{*\prime}}{P_k^*} = \frac{x_0}{h - x_0} \lesseqgtr 1, \qquad \text{je nachdem} \qquad x_0 \lesseqgtr \frac{h}{2}$$

ist. Da x_0 um so genauer mit der Abszisse des Querschnittsschwerpunktes übereinstimmt, je größer der Ringhalbmesser R gegenüber der Ringstärke h ist, so wird man schließen dürfen, daß die Kipplasten der Innenpressung größer bezw. kleiner als diejenigen der Außenpressung sind, wenn die Hauptmasse des Ringes wesentlich in der Nähe des inneren bezw. des äußeren Aequators vereinigt ist; so zeigt denn auch wieder der Versuch, daß der Ring Abb. 8 eher bei Innenpressung, der Ring Abb. 9 dagegen eher bei Außenpressung umzukippen beginnt, falls man beachtet, daß P die Pressung auf die Winkeleinheit des Aequatorumfanges sein soll.

Versteht man statt dessen unter Q die Pressung auf die Längeneinheit des Aequatorumfanges, so ist am inneren bezw. am äußeren Aequator

$$Q R = P \qquad \text{bezw.} \qquad Q' (R + h) = P'\,,$$

wo R jetzt immer den Halbmesser des inneren Aequators vorstellen soll, und somit gilt für die kritischen Belastungen

$$\frac{Q_k'}{Q_k} = \frac{Q_k^{*\prime}}{Q_k^*} = \frac{R}{R + h} \cdot \frac{x_0}{h - x_0} \lesseqgtr 1, \qquad \text{je nachdem} \qquad x_0 \lesseqgtr \frac{h}{2} \cdot \frac{R + h}{R + h/2}$$

ist. Auf die Art der soeben gezogenen Schlüsse hat diese Abänderung in der Maßbeziehung der Pressung keinen starken Einfluß, da von vornherein R wesentlich größer als h sein sollte, wenn unsere Ergebnisse Zuverlässigkeit beanspruchen.

Selbstverständlich gelten alle diese Ueberlegungen nur solange, als die Außenpressung unter derjenigen Belastung bleibt, welche die Stabilität des Ringes als eines rotationssymmetrischen Gebildes überhaupt in Frage stellt. Nach den hierüber vorliegenden Untersuchungen[1]) ist anzunehmen, daß diese Belastung bei hinreichend flachen Ringen erst über den Kipplasten P_k' und $P_k^{*\prime}$ liegt, nicht mehr hingegen bei breiteren Ringen, so daß für solche die ausgerechneten Kipplasten bei Außenpressung unter Umständen nur noch theoretische Bedeutung haben können; der Ring kann in sich schon zusammengeklappt sein, ehe er zum Kippen kommt. 300

[1]) Vergl. Encykl. d. math. Wiss., Band IV, Teilband 4, S. 377 (Art. v. Kármán).

Der Beginn des Fließvorganges in einem tordierten Stab.[1]

Von A. NÁDAI in Göttingen.

Der Wunsch, die Methoden und Hilfsmittel der Mechanik der stetig verbreiteten Massen auch auf die bildsamen Zustände der festen Körper und vor allem der dehnbaren Metalle auszudehnen, wird gefördert werden, wenn man ähnlich, wie dies in der Hydrodynamik längst der Fall ist, über einige wenige typische mechanische Bilder solcher Körper verfügen wird. Zur Verfolgung der langsamen Fließvorgänge in den Metallen, die noch als Gleichgewichtszustände angesehen werden dürfen, hat es sich als fruchtbar erwiesen, einen bildsamen Körper zu betrachten, wie ihn L. Prandtl seinen beiden Abhandlungen über die Eindringungsfestigkeit[2]) zugrunde gelegt hat. Die Bedingung für den Eintritt des plastischen Zustandes wird der Erfahrung entnommen, sie setzt zwischen der kleinsten und der größten Hauptspannung eine Beziehung fest und stützt sich auf die v. Kármánschen Versuche[3]) über die Mohrsche Umhüllende aller an der Grenze gelegenen größten Spannungskreise. Da die bleibenden Formänderungen der Metalle, die eine ausgesprochene Fließgrenze besitzen, sich ohne eine nennenswerte Steigerung der Spannung zu entwickeln beginnen, wird man ferner die einfachste Annahme machen dürfen, daß die bleibenden Formänderungen beim beginnenden Fließen noch unabhängig von den Spannungen zunehmen.

Unter den Gleichgewichtszuständen eines Metallkörpers, in dem sich bleibende Formänderungen zu entwickeln beginnen oder bereits vollzogen haben, läßt der Spannungszustand eines verdrehten Stabes eine mathematische Behandlung zu, wenn das Metall in der erwähnten Art zu fließen beginnt. Da in den Elementen eines verdrehten Stabes überhaupt nur eine Art von Spannungszuständen vorkommt, ist nur der betreffende Spannungszustand in der Mohrschen Kurve für alle Elemente maßgebend, in denen die Fließgrenze erreicht wurde. Der Gleichgewichtszustand, der bei der Verdrehungsbeanspruchung in den bleibend verzerrten Stabteilen entsteht, gehört ferner — wenigstens so lange an den genannten einfachsten Annahmen festgehalten werden darf — der Gruppe von statisch bestimmten Gleichgewichtszuständen plastischer Körper an, auf die H. Hencky[4]) vor kurzem die Aufmerksamkeit gelenkt hat: die Gleichgewichtsgleichungen und die Plastizitätsbedingung reichen bereits aus, um den Spannungszustand in den plastischen Gebieten des Stabes anzugeben. Die Verdrehungsaufgabe im bildsamen Zustand eines Metalles ist für einen Stab mit einem kreisförmigen Querschnitt bereits von St. Venant[5]) behandelt worden. P. Ludwik[6]) und L. Prandtl[7]) haben für den Kreisquerschnitt auch für ein beliebiges Fließgesetz den Zusammenhang zwischen den Schubspannungen und den bleibenden Schiebungen angegeben.

Die folgende Rechnung setzt, ebenso wie die mathematische Theorie der elastischen Verdrehung eines Stabes, mit der sie eng verknüpft bleibt, spezifische Schiebungen und Dehnungen voraus, die gegen die Einheit klein sind. Vom plastischen Körper wird vorausgesetzt, daß erstens seine Formänderungen noch ohne eine merkliche, d. h. selbst nicht mit der elastischen Dilatation vergleichbare Volumenänderung erfolgen, und daß zweitens die Elastizitätskonstanten des Materials nach Unterbrechung des Fließvorganges die nämlichen sind wie vor dem Fließen.

1. Die Spannungsfunktion der Torsion für die bleibend verzerrten Teile des Querschnittes. Die beiden Komponenten τ_x und τ_y der Schubspannung τ, die in einem Punkte x, y der Querschnittsebene wirken, genügen der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

[1]) Erweiterte Wiedergabe eines Vortrages am 25. Sept. 1923 auf der gemeinsamen Tagung der deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Gesellschaft für angewandte Mathematik u. Mechanik in Marburg a. d. Lahn.

[2]) Ueber die Härte plastischer Körper. Göttinger Nachrichten 1920, S. 74 und diese Zeitschrift Bd. 1, S. 15, 1921.

[3]) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, Mechanik, Art. 27. Vergleiche ferner die grundlegenden Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck v. Kármáns mit Marmor- und Sandsteinzylindern. Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 118.

[4]) Diese Zeitschrift, Bd. 3, S. 241, 1923.

[5]) Vergl. Todhunter and Pearsons Geschichte der Elastizitätslehre.

[6]) Elemente der technologischen Mechanik. J. Springer, 1909.

[7]) In seinen Vorlesungen. Vergl. auch A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, Bd. 2, S. 302, 1920.

und der Bedingung des plastischen Zustandes

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = \tau_0^2 = \text{konst.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Die letzte Gleichung sagt aus, daß unter allen in den verschiedenen Schnittebenen im Material wirkenden Schubspannungen die größte, die hier gleich der Schubspannung τ ist, einen unveränderlichen Wert τ_0 hat.

Zur Darstellung des Spannungszustandes soll nach dem Vorgange von Prandtl[1]) eine Spannungsfunktion benutzt werden. Der Gleichung (1) wird genügt, wenn man setzt

$$\tau_x = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_y = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Abb. 1

Es seien $f_2, f_3 \ldots$ die Teile des Querschnittes, in denen das Material fließt. Die Gleichung (2) zeigt dann, daß die Funktion F innerhalb der Gebiete $f_2, f_3 \ldots$ der partiellen Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = \tau_0^2 = \text{konst.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

zu genügen hat. Der auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Differentialausdruck ist das Quadrat des absoluten Betrages vom Gradient oder der größten Steigung der Fläche F. Es muß also für F

$$|\text{grad}\, F| = \tau_0 = \text{konst.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

an jeder Stelle xy sein, die in einem bildsam verzerrten Querschnittsteil liegt. Durch diese Eigenschaft und die Bedingung

$$-\tau_y\, dx + \tau_x\, dy = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

nach der die resultierende Schubspannung τ in jedem Randpunkte eines bildsam verzerrten Querschnittsteiles tangential zur Randkurve $y = f(x)$ gerichtet, oder nach der auf ihr $F = \text{konst.}$ sein muß, ist die plastische Spannungsfunktion F des Querschnittes bestimmt. Wir setzen auf dem Rande $F = 0$. Der Verlauf der Ordinaten der Spannungsfunktion F läßt sich durch zwei Flächen darstellen, die man über der Querschnittsfigur errichten kann. Sie wird durch die eine oder die andere der unter der Steigung $\text{grad}\, F = \tau_0$ über der Randkurve $y = f(x)$ des Querschnittes errichtbaren Böschungsflächen dargestellt. Der Tatsache, daß der Differentialgleichung zwei zur Grundebene spiegelbildlich gelegene solche Flächen genügen, die über einem Punkte xy die Ordinate $\pm F$ oder dasselbe Gefälle haben, so daß grad F für die eine Fläche gleich und entgegengesetzt gerichtet dem Gradient der anderen ist, entsprechen die beiden Drehrichtungen der Torsion. Die plastische Spannungsfunktion F oder die Gestalt der beiden Böschungsflächen wird nur durch die Form der Randkurve und durch die Fließgrenze τ_0 bestimmt. Ihre Form ist vom Verdrehungswinkel ϑ des Stabes unabhängig.

Wir haben nunmehr die Frage zu beantworten, welche Stücke der über der Randkurve errichtbaren Böschungsfläche zu einem gegebenen Wert des Drehmomentes gehören oder mit anderen Worten, durch welche Kurven die plastischen Gebiete $f_2, f_3 \ldots$ gegen den elastischen Teil f_1 des Querschnittes abzugrenzen sind. Wir bezeichnen alle Größen, die sich auf den elastisch verzerrten Querschnittsteil beziehen, mit dem Zeiger 1. Von der Spannungsfunktion F_1 wissen wir, daß ihre Ordinaten über der Fläche f_1 der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = \Delta F_1 = -2G\vartheta \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

gehorchen und auf den freien Querschnittsrändern der Bedingung $F_1 = 0$ genügen. (G bedeutet den Schubmodul, ϑ den spezifischen Verdrehungswinkel des Stabes.) Nehmen wir für einen Augenblick an, daß uns die Werte von F_1 auch auf den Grenz-Kurven der bleibend verzerrten Gebiete bekannt wären. Dann wäre die Fläche F_1 bestimmt, und wir könnten den Verlauf der Spannungslinien $F = \text{konst.}$, die in jedem Punkte xy die Richtung der Resultierenden Schubspannung τ angeben, zeichnen. Man sieht nun sofort, daß die Spannungslinien in ihren Schnittpunkten mit den Grenzkurven einer Forderung genügen müssen: sie dürfen beim Durchgang durch diese Kurven keine Brechung erleiden. Die Schubspannung τ muß denselben Wert τ_0 annehmen,

[1]) Phys. Zeitschr., Bd. 4, 1903.

gleichgültig von welcher Seite man sich der Grenzkurve nähert, eine Brechung der Spannungslinien wäre aus Gleichgewichtsgründen nur zulässig, wenn die Grenzkurve den Winkel der Spannungslinien halbieren würde, dann müßte aber der Vektor τ an der Grenzlinie sich um einen endlichen Winkel drehen, wofür nach Eintritt einer infinitesimalen bleibenden Formänderung kein Grund angegeben werden könnte. Die beiden Aeste einer Spannungslinie, die in der Grenzkurve zusammentreffen, müssen sich also berühren. Daraus folgt weiter, daß, wenn wir in einem einzigen Punkte einer Grenzkurve $F = F_1$ wählen, die Ordinaten F und F_1 der elastischen und der plastischen Spannungsfunktion in allen Punkten der Grenzkurve der Bedingung $F = F_1$ genügen werden. Wir erkennen, daß für einen gegebenen Verdrehungswinkel ϑ des Stabes als Grenzlinien der plastischen Gebiete im Querschnitt die Projektionen jener Kurven auf die Querschnittsebene sich ergeben, entlang denen die Spannungsfunktion F_1 die Böschungsfläche F berührt.

Die genannten Eigenschaften der Flächen F und F_1 legen eine Erweiterung des Prandtlschen Gleichnisses über den Spannungszustand eines elastisch verdrehten Stabes auf den Fall seiner überelastischen Beanspruchung nahe:

Man bestreue die wagerecht gehaltene Querschnittsfigur des Stabes mit einem feinen Pulver, bis sich über ihrer Umrißlinie die natürliche Böschungsfläche ausgebildet hat. Von diesem Hügel fertige man sich ein affines Abbild im Negativ an. Verschließt man hierauf die ebene Grundfläche der Höhlung mit einer ausgespannten Haut und belastet diese durch einen Druck, so wird die Haut, wenn der Druck einen gewissen Wert erreicht hat, sich von innen an das flache Dach der Höhlung anlegen.

Die freien Teile der Haut und die von ihr bedeckten Teile der Böschungsfläche bilden zusammen den Spannungshügel oder ein affines Abbild der Spannungsfläche des bleibend verdrehten Stabes. Unter den von der Haut berührten Teilen wird das Material bleibend, unter dem freien Teil elastisch deformiert.

Die Prandtlschen Sätze bleiben in Geltung: die resultierende Schubspannung in einem Punkte des Querschnittes ist dem Gefäll der Spannungsfläche, das Drehmoment des Stabes dem doppelten Inhalt des von ihr eingeschlossenen Raumes gleich. Die Schichtenlinien des Spannungshügels bilden die Spannungslinien des Querschnittes des bleibend verdrehten Stabes.

Bezeichnet ϑ_0 den Verdrehungswinkel in dem Augenblick, in dem in einem (oder mehreren) Randpunkten die Fließgrenze τ_0 zuerst erreicht wird, so bestimmt sich dieser Winkel daraus, daß für die zugehörige elastische Spannungsfläche F_1 der maximale Wert des Gradienten

$$(\text{grad } F_1)_{\max} = \tau_0$$

wird. Dann verhält sich der Druck p_0, unter dem die Haut sich das erste Mal an die Böschungsfläche anlegt, zu einem beliebigen Druck $p_1 > p_0$, wie die entsprechenden Winkel ϑ_0 und ϑ_1. Der spezifische Verdrehungswinkel ϑ_1 des Stabes, der einer Ausdehnung der Fließzonen gemäß den Berührungskurven entspricht, die mit der Haut unter dem Druck p_1 ermittelt wurden, ist also

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 \frac{p_1}{p_0}.$$

Die Konstruktion des Schichtenplanes der plastischen Spannungsfläche F wird durch die Untersuchung von F. Schilling über Böschungsflächen sehr erleichtert und

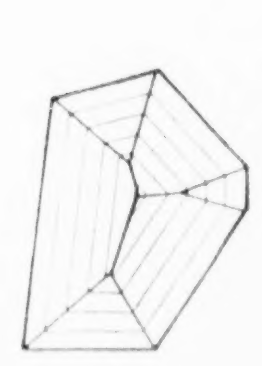


Abb. 2

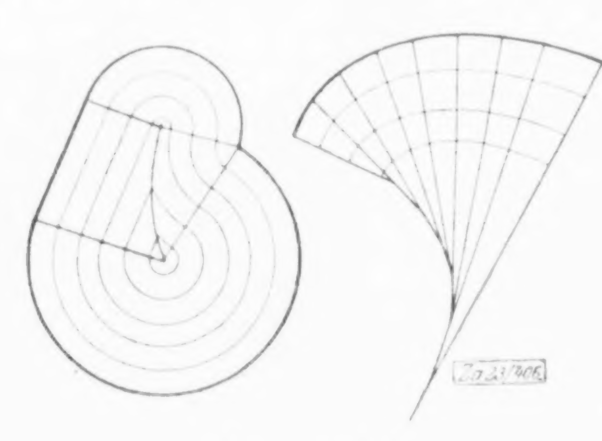


Abb. 3 und 4

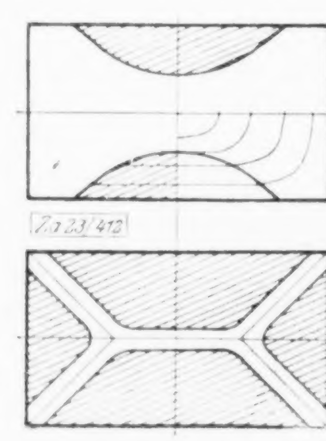


Abb. 5 und 6

gefördert, die vor kurzem in dieser Zeitschrift erschienen ist[1]). Es genügt an einige seiner Bemerkungen zu erinnern: die Schichtenlinien einer Böschungsfläche sind aequidistante Kurven. Man erhält das topographische Bild des plastischen Spannungshügels, wenn man die Normalen zur Randkurve des Querschnittes errichtet und auf ihnen die Punkte gleicher Entfernung von ihr verbindet. Die ersteren geben im Grundriß die Richtung der »Schraffen« (der Böschungs- oder Gefällslinien) an, die Aequidistanten der Randkurve bilden die Spannungslinien des Querschnittes nach Eintritt der Fließgrenze. In den Punkten eines Querschnittes, die auf einer Normalen der Randkurve liegen, hat die resultierende Schubspannung dieselbe Richtung (und Größe). Will man von der Böschungsfläche ein Modell erzeugen, so errichte man nach Schilling über der Evolute ihrer Randkurve einen lotrechten Zylinder und wickele einen unter ihrem Böschungswinkel schräg abgeschnittenen Papierstreifen um ihn herum, der bis an die Kurve heranreicht. Die schräge Gerade beschreibt ihre Böschungsfläche (Abb. 4). Ist der Rand aus geraden Linien oder aus Kreisbögen zusammengesetzt, so bildet die plastische Spannungsfläche ein über der Querschnittsfigur zu errichtendes Dach mit ebensoviel Ebenen oder Kreiskegelausschnitten gleicher Neigung.

Für das Eindringen der Fließzonen in das Innere eines Stabes mit einem rechteckigen Querschnitt ergeben sich die Abb. 5 und 6. Das elastische Gebiet schrumpft allmählich auf dünne Stege zusammen. Ihre Mittellinien sind im Grundriß der Spannungsfläche der First und die Schnitte der schiefen Ebenen des über dem Rechteck errichteten Daches. Der Spannungshügel über einem bleibend verdrehten Bandeisen ist ein schmaler Damm, der oben von einem parabolischen Zylinder berührt und abgerundet ist.

Es liegt im Wesen der von den durchschrittenen Formänderungswegen als unabhängig angenommenen Fließspannungen, daß sich auf Grund unserer schematisierenden Darstellung des Fließvorganges ein asymtotischer Wert des Drehungsmomentes ergibt. Er wird durch den doppelten Inhalt des von der plastischen Spannungsfläche begrenzten Raumes gegeben.

A. und L. Föppl[2]) haben am Beispiel eines verbogenen Stabes und eines verdrehten Kreiszylinders die Frage nach dem Eigenspannungssystem gestellt und beantwortet, das in diesen Körpern nach der Entlastung zurückbleibt, wenn ihr Material über die Fließgrenze beansprucht wurde. Das in einem über die Fließgrenze verdrehten Stab nach der Entlastung zurückgebliebene Eigenspannungssystem läßt sich hier mit Hilfe der Spannungsfunktion angeben. Wenn man den Stab mit einem Drehmoment M^* bleibend verdreht hat, bestimmt sich die Verteilung der Spannungen in ihm unter einem kleineren Moment M aus der Differenz der Ordinaten von zwei Spannungsflächen F^* und F. F^* ist die Spannungsfläche, die zum Moment M^* gehört, F ist eine elastische Spannungsfläche des Querschnittes mit $M^* - M$ als Moment. Denn nach der Entlastung müssen sich auch diejenigen Teile des Stabes, die vorher an der Fließgrenze bleibend verdreht wurden, gegenüber allen weiteren Veränderungen des Spannungszustandes wie ein vollkommen elastisches Material verhalten, wenigstens solange τ nicht an einer Stelle den Wert $\pm \tau_0$ erreicht. Nehmen wir an, daß letzteres nicht der Fall sei, bis M auf Null abgenommen hat, so ergibt sich das im Stab nach seiner Entlastung zurückgebliebene Eigenspannungssystem als der Gradient der Differenz der Fläche F^* und einer Prandtlschen elastischen Spannungsfläche F: $|\tau| = |\operatorname{grad}(F^* - F)|$. F ist mit dem Moment M^* zu konstruieren.

So ergibt sich beispielsweise das Eigenspannungssystem in einem Stab von quadratischem Querschnitt, den man vom asymptotischen Wert des Momentes entlastet, wenn man den Gradient der Differenz der Ordinaten von einer vierseitigen Pyramide F^* und der elastischen Spannungsfunktion F des quadratischen Querschnittes bildet, die dasselbe Volumen abschließt, wie die vierseitige Pyramide. Der asymptotische Wert des Momentes ist gleich dem doppelten Inhalt der vierseitigen Pyramide über dem Quadrat

$$M^* = 2\iint F^*\, dx\, dy = \frac{8\,\tau_0\, a^3}{3}$$

(die Quadratseite gleich $2a$ gesetzt).

Das Drehmoment eines Stabes von quadratischem Querschnitt ist im elastischen Bereich der Formänderungen nach St. Venant[3])

$$M = 4{,}50\, G\,\vartheta\, a^4.$$

[1]) Bd. 3, Heft 3, S. 197, 1923.

[2]) Drang und Zwang, B. 2, S. 308 und 314.

[3]) S. Love, Elasticity, 2 Ed. P. 311.

Aus der Gleichung $M = M^*$ folgt für den Winkel, um den ein Stück des Stabes von der Länge eins nach seiner Entlastung vom Moment M^* sich elastisch zurückdreht

$$4{,}50\, G\,\vartheta\, a^4 = \frac{8\,\tau_0\, a^3}{3}, \qquad \vartheta = 0{,}593\,\frac{\tau_0}{G\,a}.$$

Der Schubspannungsvektor τ des Eigenspannungssystems, das nach der völligen Entlastung des Stabes in ihm zurückbleibt, ist innerhalb des Gebietes, das durch die Diagonalen $y = x$, $y = -x$ und die Seite $x = a$ begrenzt wird, gegeben durch

$$\tau_x = -\frac{16\,G\,\vartheta\,a}{\pi^2}\sum_n (-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{n\,\pi\,y}{2\,a}}{n^2\,\mathfrak{Cof}\,\frac{n\,\pi}{2}}\cdot\cos\frac{n\,\pi\,x}{2\,a},$$

$$\tau_y = \tau_0 - 2\,G\,\vartheta\,x - \frac{16\,G\,\vartheta\,a}{\pi^2}\sum_{\substack{n \\ (n=1,3,5,\ldots)}} (-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{n\,\pi\,y}{2\,a}}{n^2\,\mathfrak{Cof}\,\frac{n\,\pi}{2}}\,\sin\frac{n\,\pi\,x}{2\,a},$$

oder durch die Summe der Komponenten des Systems $\tau_x = 0$, $\tau_y = \tau_0$, die dem plastischen Anfangszustand entsprechen, und der Komponenten τ_x, τ_y eines ideell elastisch ertragenen Systems. Das letztere ist durch die St. Venantschen Schubspannungsformeln gegeben; der in dieselben eingehende Drehwinkel ϑ wurde eben ermittelt.

2. Das Mitdrehen der Hauptspannungsrichtungen bei erzwungenen Formänderungen. Die Formänderung der Stabteile, in denen das Material fließt, konnte bisher unberücksichtigt bleiben, weil die Gleichgewichts- und die Plastizitätsbedingung schon ausreichten, um den Spannungszustand in ihnen zu bestimmen. Wir haben uns jetzt davon zu überzeugen, daß das durch die Verdrehung der Querschnitte dem Stab aufgezwungene System von Schiebungen mit den Gesetzen verträglich ist, nach denen das einzelne Element des Stabes seine Gestalt ändert, wenn seine Spannungen an der Fließgrenze liegen. Außerdem müssen die kleinen Verschiebungen der Grenzfläche des plastischen Gebietes der Bedingung des stetigen Körperzusammenhanges gegen den elastischen Teil genügen. Wenn auch mit R. v. Mises[1]) zu erwarten steht, daß die Vorgänge, die den Ursprung der plastischen Formänderungen bilden, in den metallischen Kristallkonglomeraten durch statistische Regeln zu erfassen und näher zu erklären sein werden, so wird man doch fürs erste versuchen, ob nicht die grobmechanische Beschreibung der Fließvorgänge einige Folgerungen zu ziehen gestattet. Eine solche ist die schon von Tresca erkannte Tatsache: die Hauptachsen der Dehnungszuwüchse und die Hauptspannungsrichtungen fallen während des Fließens zusammen. Diese wichtige Erfahrungstatsache hat in der St. Venantschen und v. Misesschen[2]) Dynamik der plastischen Formänderungen Berücksichtigung gefunden. Sie ist tief im Mechanismus des Fließvorganges begründet. Wenn auch die elastischen Formänderungen berücksichtigt werden sollen, bedarf sie einer Ergänzung.

Indem wir uns hier auf den speziellen, ebenen oder nach der v. Kármánschen Bezeichnung halbplastischen Fließzustand beschränken, der bei der Torsion vorliegt, genügen uns zur Beschreibung des Spannungszustandes die Komponenten τ_x, τ_y der Schubspannung τ und zur Angabe des Formänderungszustandes die Komponenten γ_x', γ_y' des elastischen und γ_x'', γ_y'' des bleibenden Anteiles der Schiebung γ. Um die Abhängigkeit von τ mit γ während einer Folge von plastischen Gleichgewichtszuständen unter Berücksichtigung der elastischen Formänderungen verfolgen zu können, soll hier eine die Uebersicht sehr erleichternde Darstellung der Bewegungen der Vektoren τ und γ in einer τ- und in einer γ-Ebene verwendet werden, die ich einem vor längerer Zeit gemachten Vorschlag (es handelte sich damals um das ebene Problem) von Hrn. Prandtl verdanke. Dem Spannungszustand entspricht in der τ_x-, τ_y-Ebene der Vektor τ oder sein Endpunkt T; der Punkt T kann nur innerhalb oder höchstens auf dem Umfang eines Kreises liegen, der seinen Mittelpunkt im Ursprung des τ_x-, τ_y-Systems hat und dessen Halbmesser gleich τ_0 ist, wo mit τ_0 die Fließgrenze des Materials für die reine Schubbeanspruchung bezeichnet wird. In ähnlicher Weise wird der Formänderungszustand in der γ_x-, γ_y-Ebene dargestellt, zu seiner Angabe werden im allgemeinen zwei Punkte (P und Q) erforderlich

[1]) Diese Zeitschrift, 1921, Bd. 1, S. 425.

[2]) Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. Göttinger Nachrichten 1913.

sein. Es sind dies außer dem Ursprung des γ_x-, γ_y-Systems die Ecken eines Dreiecks, das durch die drei Vektoren γ, γ' und γ'', der gesamten, der elastischen und der bleibenden Schiebung gebildet wird.

α) Wir beginnen mit einem spannungs- und zugleich dehnungslosen Anfangszustand. Solange $\tau < \tau_0$ ist, entspricht dem Punkt T (τ_x, τ_y) (Abb. 7 und 8) eindeutig und umkehrbar ein Punkt P (γ_x, γ_y) in der γ-Ebene mit den Koordinaten $\gamma_x = \tau_x/G$, $\gamma_y = \tau_y/G$, wo G den Schubmodul bedeutet. Der Punkt Q (γ_x'', γ_y'') fällt in den Ursprung herein, die bleibenden Schiebungen γ_x'', γ_y'' sind Null. Erreicht die Schubspannung τ in einem Punkt T_1 des Kreisumfanges die Fließgrenze τ_0, so wird von da ab dem Punkt T_1 kein bestimmter Punkt P mehr eindeutig zugeordnet, wohl aber *eine bestimmte Bewegungsrichtung*. Der Punkt P muß sich auf dem zu OT_1 parallelen Strahl OP_1 verschieben, denn andernfalls würden die Hauptdehnungsrichtungen im Material nicht mit den Hauptspannungsrichtungen zusammenfallen. Die Bedingung hierfür ist $\gamma_x : \gamma_y = \tau_x : \tau_y$. Sowie der Punkt P den Kreis mit dem Halbmesser τ_0/G verlassen hat und sich auf der Verlängerung von OP_1 weiter bewegt, nimmt er den Punkt Q mit, denn die Koordinaten des Punktes Q sollen die bleibenden Schiebungen γ_x'', γ_y'' angeben. Während der Verschiebung der Punkte P und Q bleibt ihre Entfernung dauernd $PQ = \tau_0/G$. Sie stellt den elastischen Anteil γ' der Schiebung γ dar. Wir können aus den Abbildungen die Tatsache entnehmen, daß, *wenn während des Fließens die Hauptspannungsrichtungen relativ zum Körper sich nicht drehen, die elastischen Schiebungen* γ_x', γ_y' *und die bleibenden* γ_x'', γ_y'' *sich wie* $\gamma_x' : \gamma_y' = \gamma_x'' : \gamma_y'' = \tau_x : \tau_y$ *verhalten müssen.*

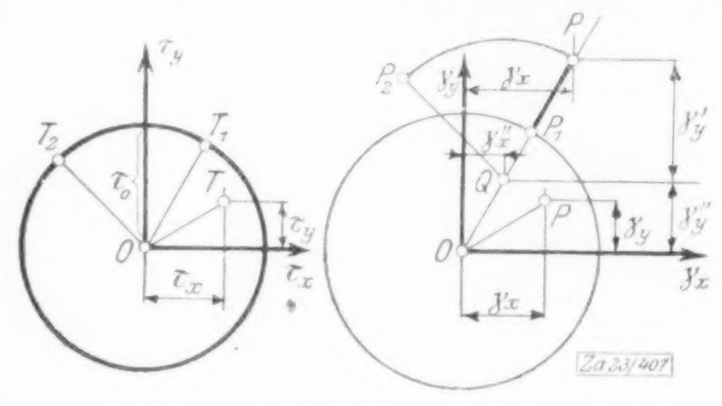


Abb. 7 und 8

β) Wir nehmen nunmehr an, daß der Fließvorgang unterbrochen wird. In der Darstellung der Abbildung 7 und 8 heißt dies, daß der Punkt T wieder in das Innere des Kreises mit dem Halbmesser τ_0 zurückgezogen wird. Dann entspricht, solange $\tau < \tau_0$ bleibt, jeder inneren Lage des Punktes T wieder eindeutig und umkehrbar eine bestimmte Lage des Punktes P. Der einzige Unterschied gegen die unter α) betrachteten Verhältnisse ist, daß sich der Punkt Q jetzt nicht mehr im Ursprung des $\gamma_x \gamma_y$ Systems befindet, seine Lage bildet vielmehr sozusagen den neuen Ursprung, von dem aus alle *elastischen* Formänderungen zu zählen sind. Rückt insbesondere T in den Ursprung der τ-Ebene, so fällt der Punkt P mit dem Punkt Q zusammen. Unter den elastischen Formänderungen betrachten wir noch eine Verschiebung von T entlang des Grenzkreises $\tau = \tau_0$, nachdem die Schubspannung τ um eine unendlich kleine Größe vermindert wurde. Dem Kreisbogen $T_1 T_2$ (Abb. 7) entspricht in der γ-Ebene ein Kreisbogen PP_2 (Abb. 8) um Q als Mittelpunkt, mit $QP_2 = \tau_0/G$ als Halbmesser und demselben Zentriwinkel. *Diese elastische Deformation ist also nach jeder plastischen möglich, ohne daß die größte Schubspannung ihren Grenzwert um mehr als eine verschwindend kleine Größe unterschreitet.*

γ) Wenn das Material aus einem durch die Lage der Punkte $P_1 Q_1$ gegebenen Anfangszustand (Abb. 9 und 10), der an der Fließgrenze liegt, in *vorgeschriebener Weise* plastisch deformiert wird, so bilden die Endpunkte der Vektoren, durch die die resultierenden Schiebungen γ in der γ-Ebene dargestellt wurden, eine stetige Kurve cc. Wir kennen den elastischen Anteil γ' von γ nur im Anfangspunkt P_1 der Kurve, wo er durch die Strecke $Q_1 P_1$ gegeben ist. Die mit ihr parallele Richtung vom Ursprung O in der τ-Ebene führt zum Anfangspunkt T_1 und zur Anfangslage des Vektors τ. Wie finden wir den elastischen und den bleibenden Anteil von γ in einem beliebigen Punkt P, der auf der Kurve cc liegt?

Abb. 9 und 10

Wenn die Schiebung γ sich in der Richtung der Kurve cc um eine kleine Größe $\delta\gamma$ ändert, wird dies eine Aenderung des elastischen und des bleibenden Anteiles von γ

um $\delta\gamma'$ bzw. um $\delta\gamma''$ zur Folge haben. Um diese Größen zu finden, errichten wir (Abb. 10) aus P_2 das Lot auf die Richtung P_1Q_1. Wir behaupten, daß die beiden Katheten des kleinen rechtwinkeligen Dreiecks P_1SP_2 die beiden Größen $\delta\gamma'$ und $\delta\gamma''$ sind. Die Richtung der größten bleibenden Schiebung $\delta\gamma''$ muß in die Richtung der größten Schubspannung fallen, d. h. in die Verlängerung der Verbindungslinie, der Punkte P_1Q_1. Wäre die Strecke $\delta\gamma''$ länger als die Kathete des rechtwinkeligen Dreiecks P_1S, so müßte die Schubspannung während der auf die bleibende Schiebung folgenden kleinen elastischen Schiebung, die den Endpunkt der Strecke $\delta\gamma''$ in den Punkt P_2 überführt, um $(\delta\gamma''-P_1S)G$ (G ist der Schubmodul) abnehmen. Das Material würde sich also im Zustande P_2 nicht mehr an der Fließgrenze befinden. Im entgegengesetzten Falle $(\delta\gamma''<P_1S)$ müßte die Schubspannung τ größer als τ_0 werden, was für elastische Deformationen nicht möglich ist. Wir erkennen ferner, daß mit der elastischen Schiebung $\delta\gamma'=SP_2$ notwendig eine kleine Drehung des Schubspannungsvektors τ um den Winkel $P_1Q_2P_2$, d. h. eine entsprechende kleine Drehung der Hauptspannungsrichtung relativ zum Körper verbunden sein muß. Man erhält unter einem Hauptspannungssystem, das an der Plastizitätsgrenze liegt, zu einer kleinen vorgeschriebenen Aenderung $\delta\gamma$ der Schiebung γ den bleibenden und den elastischen Anteil, wenn man die Projektion von $\delta\gamma$ auf die augenblickliche Richtung des Vektors τ bzw. auf die die dazu lotrechte Richtung bildet. Die Schiebung $\delta\gamma$ enthält eine kleine bleibende Schiebung $\delta\gamma''$, während der sich die Hauptspannungsrichtungen nicht ändern, und eine darauffolgende kleine elastische Schiebung, während der das Hauptspannungssystem sich im Körper ein wenig dreht. Um schließlich den Ort der Endpunkte des Vektors γ'' oder der Punkte Q anzugeben, hat man sich nur vorzustellen, daß der Punkt P, wenn er die Kurve cc beschreibt, auf einer wagerecht gehaltenen γ-Ebene einen schweren Punkt Q mitschleppt, der mit ihm durch einen Faden von der Länge $PQ=\tau_0/G$ verbunden ist und auf der γ-Ebene mit Reibung aufliegt.

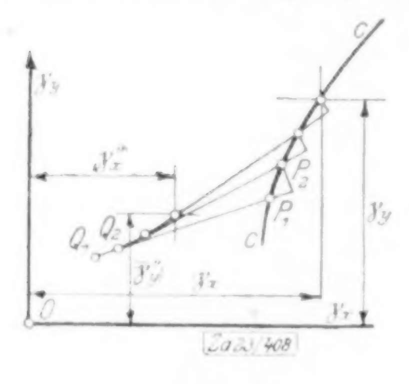


Abb. 11

Ist beispielsweise die anfängliche Lage der Schubspannung τ durch ihre Komponenten $\tau_x=0$ $\tau_y=\tau_0$ gegeben, der Formänderungszustand $\gamma_x=0$, $\gamma_y=\tau_0/G$ als Anfangslage vorgeschrieben und fließt das Material unter der konstanten Schiebung $\gamma_y=\tau_0/G$, so beschreibt der Punkt P diese Gerade und der Punkt Q die Hälfte einer Huygensschen Traktorie (Evolvente der Kettenlinie). Die Koordinaten des Punktes P sind die Komponenten $\gamma_x\gamma_y$ der gesamten Schiebung γ, die des Punktes Q die Komponenten $\gamma_x''\gamma_y''$ des bleibenden Anteils γ''. Man sieht, wie die elastische Schiebungskomponente $\gamma_y'=\tau_0/G$ im Anfangszustand sich allmählich in eine ebenso große bleibende verwandelt. Während der fortschreitenden Deformation dreht sich der Schubspannungsvektor $\tau=\tau_0$ um 90^0.

3. Die Formänderung des bleibend verdrehten Stabes. Wir suchen die mit den Gleichungen

$$\xi=-\vartheta yz,\ \eta=\vartheta xz,\ \zeta=\vartheta\varphi(x,y)\quad\ldots\ldots\quad(8),$$

$$\gamma_x=\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}=\vartheta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right),\ \gamma_y=\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z}=\vartheta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)\quad\ldots\quad(9)$$

der aufgezwungenen Querschnittsverdrehung und Verwölbung, und den soeben angeführten Regeln des Fließvorganges verträglichen Folgerungen für die elastischen und die bleibenden Anteile $\gamma_x'\gamma_y'$, $\gamma_x''\gamma_y''$ der Schiebungen in einem bleibend beanspruchten Querschnittsteil aufzustellen. Zunächst verhalten sich die elastischen Schiebungsanteile wie

$$\gamma_x':\gamma_y'=\tau_x:\tau_y\quad\ldots\ldots\ldots\quad(10).$$

Da der Schubspannungsvektor τ in einem Punkte xy des Querschnittes seine Lage beibehält, wenn in ihm einmal Plastizität eingetreten ist, haben wir nach 3. a) auch

$$\gamma_x'':\gamma_y''=\tau_x:\tau_y\quad\ldots\ldots\ldots\quad(11).$$

Die Komponenten der Gesamtschiebung

$$\gamma_x=\gamma_x'+\gamma_x'',\ \gamma_y=\gamma_y'+\gamma_y''\quad\ldots\ldots\quad(12)$$

müssen sich also ebenso verhalten:

$$\gamma_x:\gamma_y=\tau_x:\tau_y\quad\ldots\ldots\ldots\quad(13).$$

Führen wir in dieser Gleichung für $\gamma_x\gamma_y$ ihre Werte aus (9) und für τ_x und τ_y aus (3) ein, so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right):\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)=-\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial x}\quad\ldots\ldots\quad(14).$$

Da die auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehende plastische Spannungsfunktion F bereits ermittelt wurde, ist dies eine lineare, partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion φ. Führt man in (13) statt der Spannungsfunktion F den Winkel α ein, den die Spannungslinien $y = f(x)$ mit der x Achse bilden:

$$\tau_x = \tau_0 \cos \alpha, \; \tau_y = \tau_0 \sin \alpha, \; \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y} \quad . \; . \; . \; . \quad (15),$$

so ergibt sich

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \alpha = -(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$$

oder

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16).$$

n gibt hier die Normalenrichtung zur Spannungslinie $y = f(x)$ an, welche in der Reihenfolge: Tangente, Normale und z Achse ein Rechtssystem bildet.

Um diese Gleichung integrieren zu können, bedarf es nur der Angabe der Werte von φ auf der Kurve, die das betreffende, bleibend verzerrte Gebiet gegen das elastische abgrenzt. Da die Form der Grenzkurve ermittelt wurde, sind die Werte von φ auf ihr durch die senkrechten Verschiebungen ζ des elastischen Gebietes bestimmt. Die Größen, die sich auf dasselbe beziehen, sollen wieder mit dem Zeiger eins versehen werden. Die zu einem spezifischen Verdrehungswinkel ϑ gehörende Verschiebung $\zeta_1 = \vartheta \varphi_1(x, y)$ ist bekanntlich durch die zu

$$\psi_1 = F_1/G\vartheta + \frac{x^2 + y^2}{2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

konjugierte Potentialfunktion φ_1 gegeben.

Um die senkrechte Verschiebung ζ der Punkte des Querschnittes des verdrehten Stabes zu finden, bestimmt man sich erst den Spannungshügel der Querschnittsfigur und die Grenzen der plastischen Gebiete im Querschnitt, nach **2** zu einem gegebenen Verdrehungswinkel. Im elastischen Gebiet des Querschnittes ist die Verschiebung $\zeta_1 = \vartheta \varphi_1(x, y)$ durch die zu $\frac{F_1}{G\vartheta} + \frac{x^2 + y^2}{2}$ konjugierte Potentialfunktion $\varphi_1(x, y)$ gegeben, wo F_1 die Ordinate des Spannungshügels über dem elastisch verzerrten Teil des Querschnittes bezeichnet. In einem plastischen Gebiet ergibt sich die Verschiebung $\zeta = \vartheta \varphi(x, y)$ mit einer Funktion φ, die der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$$

genügt. Aus dieser Gleichung ist die Funktion φ mit jenen Werten zu ermitteln, die sich auf dem Rande des plastischen Gebietes für die Verwölbungs-Funktion φ_1 des elastischen Gebietes ergeben haben.

4. Hohlquerschnitte. Der Spannungsausgleich durch das Fließen in der Umgebung einer kleinen zylindrischen Höhlung. Die plastische Spannungsfunktion eines Hohlquerschnittes besteht, solange auf dem Lochrand $\tau < \tau_0$ ist, nur aus der Böschungsfläche des äußeren Randes. Wenn das Material jedoch am Lochrand zuerst oder später zu fließen beginnt, ist über diesem ebenfalls eine Böschungsfläche zu errichten. Sie beginnt am Lochrand in einer durch die Gleichgewichtsbedingungen bestimmten Höhe über der Ebene der äußeren Randkurve. (Eine Ausnahme bildet, wie beim Kreisringquerschnitt der Fall, daß der Innenrand eine Spannungslinie, nicht nur der elastischen, sondern auch der plastischen Spannungsfunktion ist, die man über dem äußeren Randkreis errichtet hat; für den Kreisringquerschnitt kommt deshalb nur der Kegel über dem äußeren Randkreis als plastische Spannungsfunktion in Betracht.) Wenn die Schubspannung auf dem Lochrand bei seiner Umfahrung ihre Richtung nicht ändert, kommt nur eine von den beiden Böschungsflächen in Betracht, die man über dem Lochrand errichten kann. Im andern Falle besteht die plastische Spannungsfunktion teilweise aus der einen und teilweise aus der anderen Böschungsfläche.

In der Umgebung einer kleinen zur Stabachse parallelen zylindrischen Höhlung von kreisformigem Querschnitt laufen bekanntlich die Spannungslinien eines verdrehten Stabes ähnlich wie die Stromlinien um einen in eine Flüssigkeit eingetauchten Zylinder bei der Potentialströmung. Die elastische Spannungsfunktion hat deshalb in der Umgebung des Loches und innerhalb eines Gebietes, das noch klein im Vergleich zu den Querschnittsabmessungen ist, in Polarkoordinaten r, α die Gleichung

$$F_1 = \tau_1 \cos \alpha \left(\frac{a^2}{r} - r\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

(a ist der Lochhalbmesser, τ_1 die zur y-Achse parallel angenommene Schubspannung in den ungestörten Gebieten.) Sie gibt Anlaß zu den Schubspannungen

$$\tau_r = \frac{\partial F_1}{r\,\partial \alpha} = -\tau_1 \sin\alpha \left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right), \quad \tau_t = -\frac{\partial F_1}{\partial r} = \tau_1 \cos\alpha \left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right) \quad . \quad (19)$$

und zu einer größten Schubspannung im Punkte $r = a$, $\alpha = 0$, welche $= 2\,\tau_1$ ist.

Die plastische Spannungsfunktion F besteht aus den 2 Kegelhälften:

$$\left.\begin{array}{lll} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, & F = -\tau_0\,(r - a) & \text{mit } \tau_r = 0,\ \tau_t = \tau_0 \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}, & F = \tau_0\,(r - a) & \text{»} \quad \tau_r = 0,\ \tau_t = -\tau_0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (20).$$

Die Gl. (18), (19) gelten nur solange $\tau_1 < \frac{\tau_0}{2}$ ist. Wenn $\tau_1 = \tau_0/2$ ist, berührt die Spannungsfläche F_1 ersichtlich in den Punkten $r = a$, $\alpha = 0, \pi$ des Lochrandes die beiden symmetrischen Kegelhälften der plastischen Spannungsfläche F und das Material beginnt an diesen Stellen zu fließen.

Man erzeugt das affine Abbild der einen Hälfte der Spannungsfläche F_1 durch eine dünne Haut, die man über einen großen viereckigen Rahmen gespannt hat. Mit der einen Seite des Rahmens ist in ihrer Mitte eine kleine halbkreisförmige Scheibe (vom Halbmesser a) fest verbunden. Diese Seite ist in ihren Enden in Zapfen drehbar gelagert, die eine Drehung der Seite um ihre innere Kante gestatten. Wird die Scheibe in der richtigen Richtung gedreht, so nimmt sie die Haut mit und verzerrt sie nach der gewünschten Fläche. Die Schubspannung τ_1 ist dem Winkel der Rahmenebene mit der Scheibe proportional. Um nun die Grenzen der Fließgebiete in dem gespannten Material der Umgebung des Loches mittels dieses Modells aufzufinden, befestigt man statt der ebenen Scheibe einen in ähnlicher Weise wie diese drehbar angebrachten Kreiskegelstumpf. Wenn der Kegelstumpf um die Drehachse der Seite des Rahmens gedreht wird, wird er die Haut mitnehmen. Von einem gewissen Winkel an legt sich die Haut an den Mantel an, die Grenzkurve der Berührungsfläche ist (unter der Voraussetzung kleiner Auslenkungen der Haut) die Grenze des Fließgebietes um das Loch. Es bilden sich symmetrisch zum Loch zwei plastische Gebiete, die sich allmählich zu länglichen Figuren erweitern werden. In den plastischen Gebieten sind die Spannungslinien konzentrische Kreise. Im elastischen Gebiet verlaufen die Schichtenlinien der Membran nach den Stromlinien einer Potentialströmung, die sich berührend an diese Kreise anlegen [1]).

Da die elastische Spannungsfläche mit wachsender Entfernung vom Loch sich einer Ebene nähert, sieht man unmittelbar, daß die plastischen Gebiete ganz innerhalb der Flächen liegen müssen, die von dieser Ebene aus den beiden Kreiskegelhälften herausgeschnitten werden. Das sind zwei sich schneidende Ellipsen. Im äußersten Grenzfall, wenn die Membranebene parallel zu einer Erzeugenden des Kreiskegels ist, sind die Schnitte zwei Parabeln. Diesem Zustand am Modell entspricht eine Schubspannung τ_1 in den ungestörten Gebieten, die gerade die Fließgrenze erreicht. Die Be-

[1]) Die Hälfte der Spannungslinienzeichnung für die zylindrische Höhlung (Abb. 12) ist gleichzeitig das Schichtenbild des Spannungshügels um eine auf der Oberfläche eines verdrehten Stabes parallel zu seiner Achse eingeschnittenen, kleinen Nut mit einem halbkreisförmigen Querschnitt. — Auch im Falle einer geriffelten Oberfläche lassen sich die Grenzen der plastischen Gebiete verfolgen. Wenn der Rand des Querschnittes etwa eine gewellte Linie ist, bildet der plastische Spannungshügel ein gewelltes Dach, dessen geneigte Rinnen gegen den Querschnittsrand sogar durch scharf auslaufende Grate (wie bei dem Profil in Abb. 13) getrennt sein können. Da eine angedrückte Membran sich an die Grate nicht anlegen kann, sieht man, wie solche »Rauhigkeiten« der Oberfläche wieder zur Entstehung von länglichen Fließgebieten Anlaß geben müssen, die sich senkrecht zu ihr ausbreiten werden.

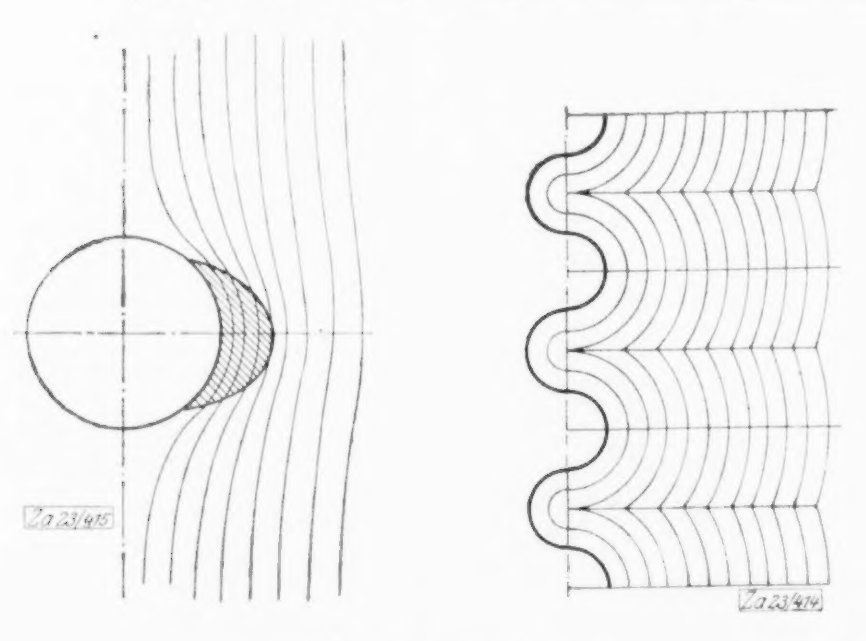


Abb. 12 und 13

trachtung führt zu der merkwürdigen Schlußfolgerung, daß das Vorhandensein einer winzig kleinen zylindrischen Höhlung in einem auf Schub beanspruchten, vollkommen homogenen Material, das unter einer gleichbleibenden größten Schubspannung fließt, genügt, damit ein plastisches Gebiet vom Loch weg nach beiden Seiten sich bis in das Unendliche ausbildet. Das plastische Gebiet kann sich nur innerhalb der konkaven Seite der beiden Parabeln fortpflanzen, und es ist durch Steigerung der Schubspannung τ_1 bis zur Fließgrenze τ_0 nicht möglich, in dem Teil der xy-Ebene, der außerhalb der beiden Parabeln liegt, eine plastische Deformation zu erzeugen[1]). In wie weit die gemachten, einfachsten Annahmen über den plastischen Zustand ausreichen, um die genauere Form des Fließgebietes auch bei größerer Ausdehnung desselben beschreiben zu können, wird die fernere Untersuchung zeigen müssen. Den Weg für sie weist der von P. Ludwik erkannte und in seinen »Fließkurven« bereits quantitativ klar erfaßte Zusammenhang der Gleitspannungen mit den spezifischen Schiebungen, durch den der Anstieg der Spannungen mit den bildsamen Formänderungen gesetzmäßig dargestellt und durch den der sogenannten Festigung des Materials Rechnung getragen werden kann.

5. Bildung der Fließfiguren. Eine Bestätigung für die Bildung schmaler Fließbezirke bieten die sogenannten Fließfiguren, die auf der Oberfläche beanspruchter Körper beim Eintritt des plastischen Zustandes beobachtet werden können. Sie treten, wie v. Kármán[2]) zuerst bemerkt hat, besonders bei denjenigen Materialien auf, die entweder unter einer konstanten oder einer abfallenden Spannung fließen. Sie können schön auf den polierten Seitenflächen eines Flachstabes aus weichem Eisen beobachtet werden, der durch eine kleine Anbohrung oder durch winzige Einkerbungen geschwächt worden ist[3]). Im weichen Eisen bilden sie auf der Oberfläche eines nicht beschädigten Stabes die Schnittlinien von Ebenen, die mit der Stabachse einen Winkel von 45° einschließen. Bei genügend homogenem Material genügt jedoch das Vorhandensein eines kleinen Loches, damit die Fließfigur sich in den beiden Ebenen entwickelt, die in der Lochachse sich schneiden. Die Abb. 14 bis 19 zeigen solche von mir, mit auf Zug und auf Druck beanspruchten, durchlochten Eisenstäben erhaltenen Figuren.

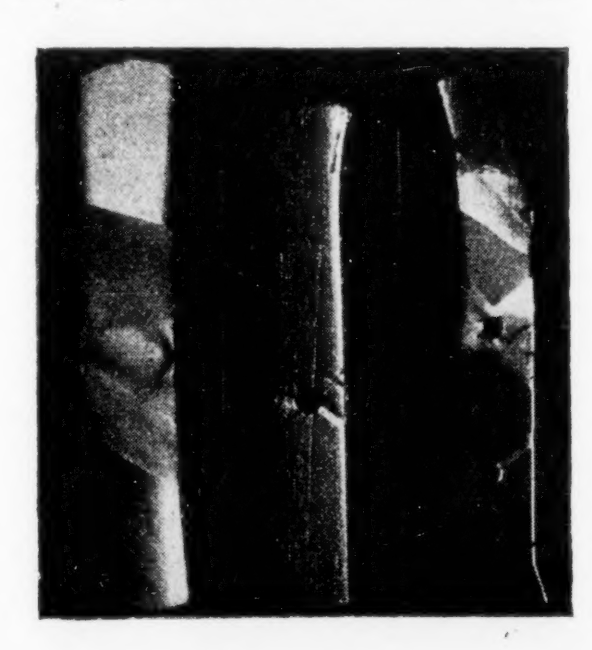


Abb. 14 bis 16

Fließfiguren auf gezogenen Flacheisenstäben. In Schlierenbeleuchtung aufgenommen. Links: Stab mit zwei kleinen Kerben im mittleren Querschnitt. Mitte: In der Mitte gelochter Flachstab. Rechts: Stab mit zwei Löchern.



Abb. 17 bis 19

Fließfiguren auf den Seitenflächen eines auf Druck beanspruchten eisernen Rechtkants, das zwei zu einander senkrechte kleine Löcher enthält. In Schlierenbeleuchtung aufgenommen.

[1]) Herr Prandtl macht mich darauf aufmerksam, daß Herr v. Kármán in einer vor längerer Zeit abgefaßten, jetzt leider nicht mehr zugänglichen Handschrift zu einem ähnlichen Ergebnis bei der Untersuchung der Ausbreitung der plastischen Gebiete in der Umgebung einer kleinen Inhomogenität in einem auf Zug beanspruchten Material gelangt ist.

[2]) Mitt. ü. Forschungsarbeiten, Heft 118.

[3]) Leblond (La technique moderne, t. XV, S. 7, 1923) konnte die Gleitebenen auf der Oberfläche von prismatischen Stäben sichtbar machen, die mit winzigen Einkerbungen versehen waren. In spröden Körpern entwickelt sich in diesen Ebenen sehr bald ein Verschiebungsbruch.

Wenn die kleine zylindrische Höhlung, wie angenommen wurde, im verdrehten Stab parallel zur Stabachse liegt, breitet sich die plastische Formänderung senkrecht zur Richtung der Spannungslinien am stärksten aus. Das ist aber gerade eine der beiden Gleitebenen des Materials, wenn das Loch an der betreffenden Stelle nicht vorhanden gewesen wäre. Die andere fällt mit der Quadratebene zusammen. Diese Tatsache läßt sich auch so ausdrücken, daß eine in einer Gleitebene des ungestörten Spannungszustandes im Material vorhandene Schwächung (weicherer Einschluß, Loch, Riß) die Ausbildung der betreffenden Gleitebene vor den andern fördert.

Auf die Ausbildung einer, wenn auch nur dünnen, jedoch zusammenhängenden plastischen Schicht in einer Gleitfläche eines Materials, die sich über größere Körperteile erstreckt und sich dem Augenschein als eine Fließfigur wahrnehmbar macht, ist auch der Freiheitsgrad für die Relativbewegung der angrenzenden Teile des beanspruchten Körpers, einschließlich der Einspannungsteile bei einem Versuch in einer Festigkeitsmaschine von Einfluß.

Seitdem Adolf Fry seine sehr beachtenswerten Versuche und Beobachtungen über die Kraftwirkungsfiguren des Flußeisens und sein schönes Aetzverfahren zu ihrer Entwickelung bekanntgegeben hat [1]), besteht die Möglichkeit, die Gleitrichtungen in einem beanspruchten Eisenkörper auf seinen Schnittflächen nachträglich sichtbar zu machen. So konnten Ad. Fry und B. Strauß [2]) im Innern von verbogenen Kesselblechen eine auffallend regelmäßige Zeichnung von Fließfiguren nachweisen. Sie bildeten in den Schnitten der Biegungsebene zwei Scharen von parallelen und unter 45° zur Stabachse geneigten Linien (Abb. 20). Diese Erscheinung dürfte wahrscheinlich bei breiten Kesselblechen durch den Umstand bedingt gewesen sein, daß während des Biegens der Bleche die mittlere Hauptspannung senkrecht zur Biegungsebene stand, und sie dürfte eine weitere schöne Bestätigung der Mohrschen Theorie über den Eintritt des bildsamen Zustandes bilden, denn nach dieser müssen die Gleitebenen in der Richtung der mittleren Hauptspannung sich schneiden. In verbogenen Stäben mit einem schmalen Rechteck als Querschnitt dürften solche Fließfiguren jedoch auf eine Drehung der Körperteile um die Lager zurückzuführen sein. Sonst wäre es nicht verständlich, warum von den andern möglichen Gleitrichtungen, die ebenfalls einen Winkel von 45° mit der Stabachse bilden, jedoch nicht senkrecht auf die Biegungsebene stehen, sich nicht auch einige gebildet haben.

An gedrückten Marmorzylindern, die kurz vor ihrem Zusammenbruch örtlich etwas plastisch werden, kann man des öfteren eine auffallend regelmäßige Ausbildung der Gleitflächen beobachten. Sie bilden zwei Systeme sich schneidender Schraubenflächen. Die Körper sind im Innern dann längst durch die Bruchkegel geschwächt oder getrennt, und die einzelnen Teile des Mantels schrauben sich wie Mutter und Schraube ineinander (Abb. 21). Die netzartige Zeichnung auf der Oberfläche des Zylindermantels dürfte darauf schließen lassen, daß in den äußeren, plastisch gewordenen Teilen des Zylinders sich allmählich ein

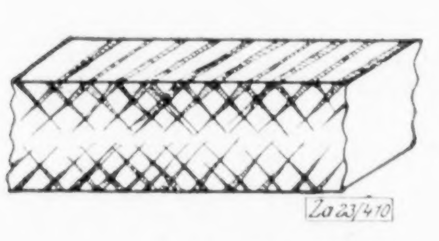


Abb. 20



Abb. 21

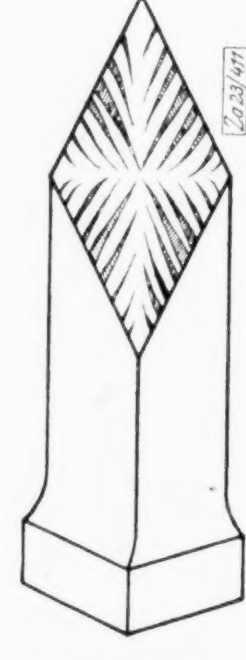
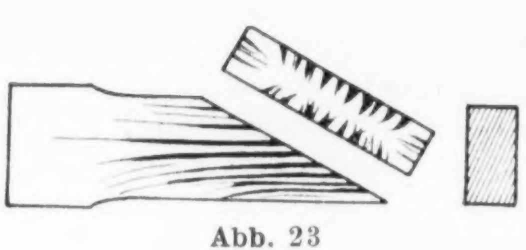


Abb. 22

achsensymmetrischer Spannungszustand herausgebildet hat, bei dem die mittlere Hauptspannung senkrecht zur Zylinderoberfläche steht. Die unter der achsialen Druckbelastung stehenden äußeren Teile des Körpers werden, weil sie sich zwischen zwei Bruchkegeln befinden, nach außen gedrängt und in der Richtung des Umfanges auf Zug beansprucht. Ueber diese Polarisierung oder Gleichrichtung der Gleitflächen soll an anderer Stelle ausführlicher berichtet werden.

[1]) Kruppsche Monatshefte, 2. Jahrg., S. 117, 1921.

[2]) ebenda, S. 126.


Abb. 23

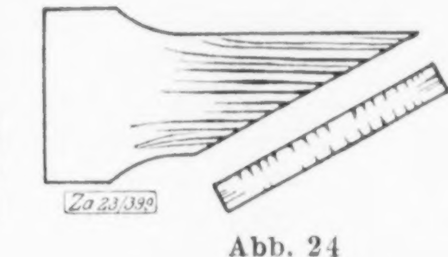
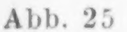
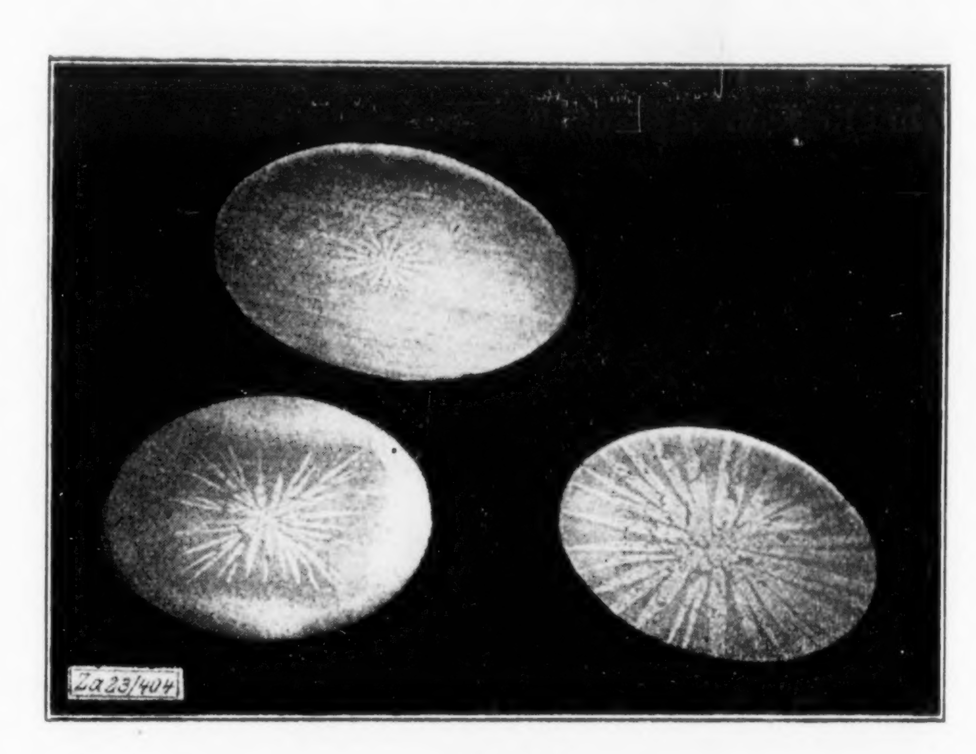
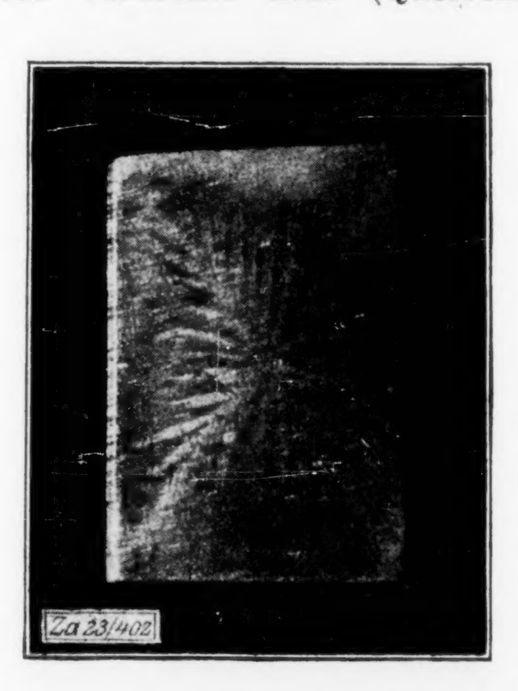


Abb. 24

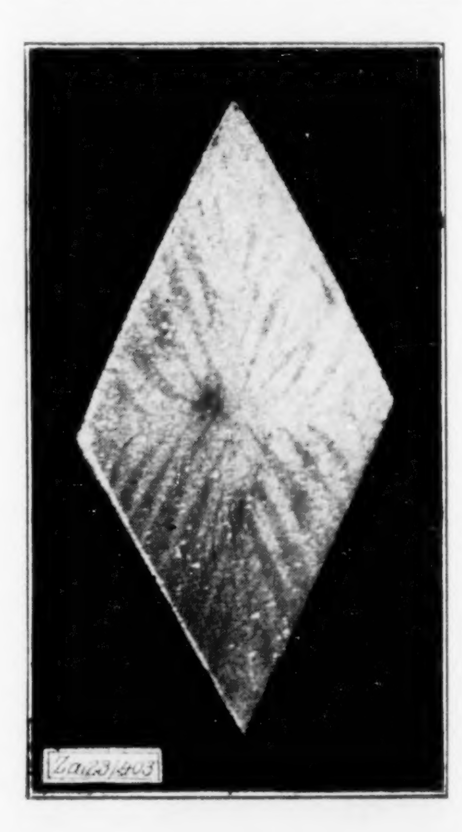

Abb. 25

Abb. 22 zeigt die Wiedergabe der Zeichnung, die ich in der Querschnittsfläche eines weichen Eisenstabes mit quadratischem Querschnitt nach einer plastischen Verdrehung erhalten habe. Der Stab wurde nach seiner Beanspruchung in schräger Richtung zu seiner Achse durchgesägt und die Schnittfläche nach dem Verfahren von Fry geätzt. Die zur Stabachse parallelen Gleitflächen traten in ihren Schnittlinien mit der schiefen Ebene schön zutage. Vom anderen System der Gleitflächen waren hingegen nur gelegentliche Spuren zu sehen. Die Schnitte der Gleitflächen mit der schiefen Ebene waren im wesentlichen gerade Linien. Eine merkliche Krümmung dieser Schnitte zeigte sich nur in der Nähe der Diagonalen des Quadrates (Verfestigungseffekt).


Abb. 26
Querschnitte von bleibend verdrehten Eisenrundstäben.
Aetzung nach A. Fry.

Bei drei Flachstäben ergaben sich nach ihrer bleibenden Verdrehung Zeichnungen nach den Abb. 23 bis 25. Die Fließlinien konnten auch auf den Breitseiten der Stäbe deutlich verfolgt werden. Die geätzten Querschnitte (Abb. 26) zeigen die Entwicklung der Gleitebenen im Innern von drei aus derselben Stange (Drm. 18 mm) abgeschnittenen und verschieden stark verdrehten Rundstäben. Die Schnitte sind Ebenen, die einen Winkel von 45° mit der Stabachse bilden. Der am schwächsten verdrehte Stab (Querschnitt rechts

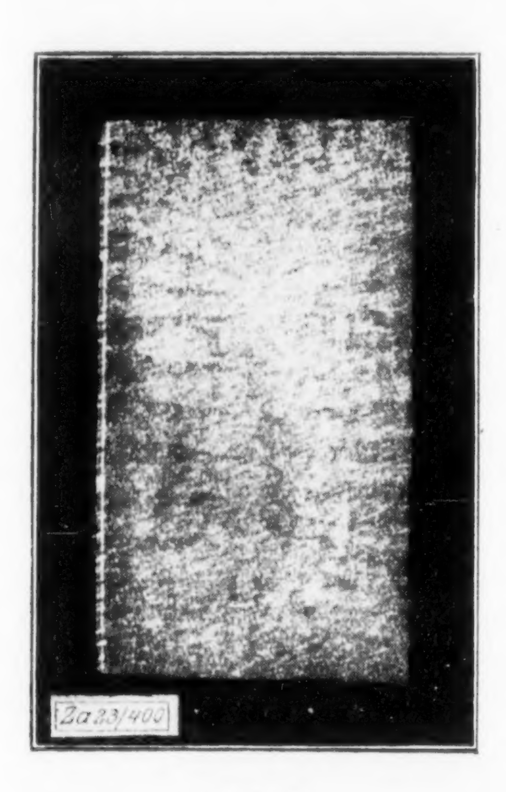

Abb. 27


Abb. 28

Schräge Schnitte durch zwei, über die Fließgrenze beanspruchte verdrehte Eisenstäbe von quadratischem Querschnitt.

unten in Abb. 26, Moment $M = 1760$ kg/cm, spezifischer Verdrehungswinkel $\vartheta = 0{,}8^0$) weist bereits die Gleitebenen fast bis zur Mitte des Stabes auf. Der Querschnitt links unten in Abb. 26 entstammt aus einem Stab, für den $M = 1820$ kg/cm, $\vartheta = 2{,}2^0$ waren; im dritten Querschnitt ($M = 2320$ kg/cm, $\vartheta = 4{,}8^0$) ist der noch nicht plastisch deformierte Teil des Stabinnern nur mehr auf ein winziges, sternförmiges Gebiet zusammengeschrumpft. Das dunkle Viereck im Querschnitt links unten der Abb. 26 dürfte mit der strukturellen Veränderung durch die plastische Formänderung nichts zu tun haben und eine Erscheinung an gewalzten Stäben sein, die neuerdings von Gredt[1]) genau beschrieben worden ist.

Die Querschnitte Abb. 27 und 28 entstammen zwei Stangen mit quadratischem, die Schnitte Abb. 29 und 30 einem Stabe mit einem rechteckigen Querschnitt.



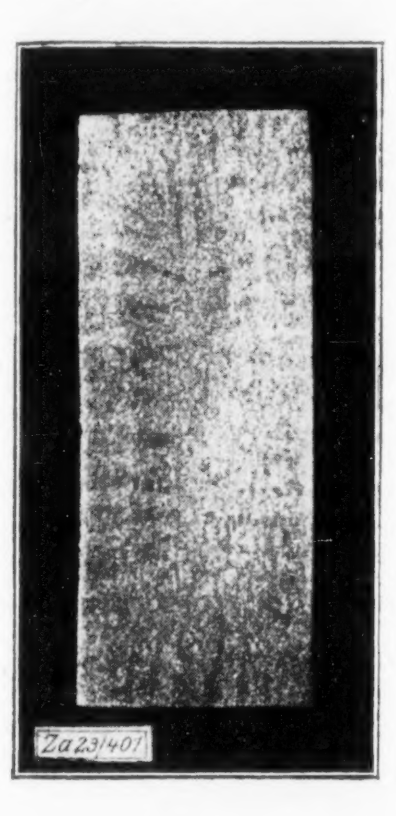


Abb. 29 Abb. 30

Ueber die Fließgrenze beanspruchter, verdrehter Flacheisenstab.
Links: Querschnitt senkrecht, Rechts: unter 45^0 zur Achse.

Die beobachteten Fließfiguren entsprachen nach Form und Lage den Forderungen der Theorie, denn nach dieser müssen die zur Stabachse parallelen Gleitflächen in einem verdrehten Stab mit kreisförmigem bezw. rechteckigem Querschnitt im wesentlichen zur Oberfläche der Stäbe senkrechte Ebenenbüschel bilden.

Göttingen, am 22. September 1923. 346

Einige unharmonische Schwingungsformen mit großer Amplitude.[2])

Von **REINHOLD RÜDENBERG** in Charlottenburg.

Die genaue Kenntnis der harmonischen Schwingungsvorgänge hat die Entwicklung der Technik in den letzten Jahrzehnten an zahlreichen Stellen gefördert. Sie ermöglicht es einerseits häufig, störende Nebenerscheinungen von vornherein bewußt zu vermeiden, und liefert andererseits die Grundlage für mancherlei nützliche Anwendungen. Im allgemeinen beschränkt man sich bei der Untersuchung auf die Annahme eines linearen Zusammenhanges zwischen Schwingungsausschlag und Kraft und erhält als Endergebnis zeitlich sinusförmige Schwingungsformen, deren Eigenperiode unabhängig von der Größe der Schwingung ist. Steht ein solches Gebilde unter der Wirkung äußerer

[1]) Ueber die Materialverschiebung beim Walzen. »Stahl und Eisen« Nr. 47, S. 1443, Bd. 43. 1923.

[2]) Nach einem Vortrage vor der Jahresversammlung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Marburg am 25. September 1923.

periodischer Kräfte, so sind Resonanzerscheinungen möglich, wenn die erzwungene Periode ganz oder nahezu mit der Eigenperiode des Schwingungssystems übereinstimmt.

Bei beliebig gearteter Abhängigkeit der schwingenden Größen voneinander pflegt man die Untersuchung meist auf kleine Schwingungen in der Umgebung irgend eines Punktes zu beschränken, auf die das lineare Gesetz näherungsweise zutrifft. Wir wollen diese Einschränkung im folgenden fallen lassen und für eine Reihe von Fällen, die in der heutigen Technik auftreten, den zeitlichen Verlauf der Schwingungen bei beliebig großer Amplitude verfolgen. Den Zusammenhang zwischen den Schwingungsgrößen, der häufig nicht analytisch, sondern graphisch gegeben ist, nennen wir die Charakteristik des schwingenden Gebildes. Nur bei geradliniger Charakteristik ergeben sich die gewöhnlichen harmonischen Sinusschwingungen. Bei beliebig gekrümmter Charakteristik dagegen erhalten wir unharmonische Schwingungsformen, deren zeitlicher Verlauf völlig von der Sinusform abweichen kann.

1. Aufstellung der Grundgleichung. Als einfachstes und altbekanntes Beispiel ist in Abb. 1 die Charakteristik für das Kreispendel dargestellt. Die Bewegungsgleichungen der Mechanik ergeben die Beziehung

$$\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} + G l \sin\varphi = 0 \qquad (1),$$

wenn mit Θ, G und l Trägheitsmoment, Gewicht und Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse des Pendels bezeichnet wird und φ den Winkel bedeutet. Die Charakteristik besitzt daher einen sinusförmigen Zusammenhang zwischen Pendelkraft $k = Gl \sin\varphi$ und Pendelausschlag φ. Die Lösung der Pendelgleichung (1), die auf elliptische Integrale führt, ist bekannt und soll hier nicht weiter behandelt werden.

In Abb. 2 ist ein elektrischer Schwingungskreis dargestellt, der in der Praxis aus der Kapazität langer Fernleitungen oder Kabel und den Wicklungen magnetisch gesättigter Transformatoren besteht. Ihr Magnetfeld Φ ist dem erregenden Strom i nicht proportional, sondern wird durch die magnetische

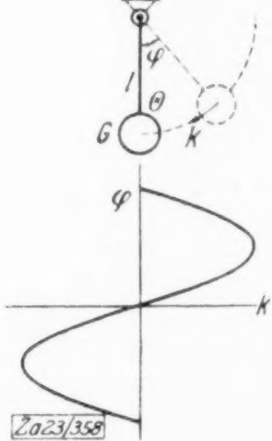


Abb. 1

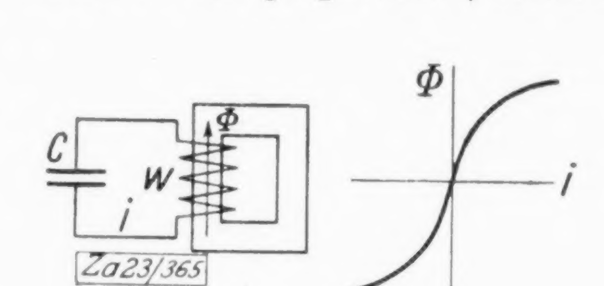


Abb. 2

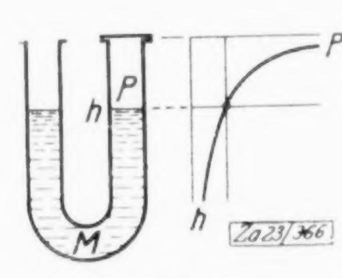


Abb. 3

Charakteristik der Abb. 2 gegeben. Das Gleichgewicht der Spannungen im Stromkreise liefert die Beziehung

$$w \frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{C}\int i\, dt = 0 \qquad (2),$$

wenn w die Windungszahl der Wicklung und C die Kapazität bedeutet. Die Differentialgleichung für den Verlauf von Magnetfluß und Strom ist daher

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{i(\Phi)}{wC} = 0 \qquad (3).$$

Eine analytische Lösung dieser Gleichung ist versucht worden, indem die Charakteristik durch die ersten Glieder einer Potenzreihe angenähert wurde. Das führt ebenfalls auf elliptische Integrale, zu deren Auswertung sehr viel Rechenarbeit erforderlich ist.[1]).

Abb. 3 stellt das Beispiel einer Wasserschwingung dar, die nicht nur durch den Einfluß der Schwerkraft, sondern auch durch den Druck p einer eingeschlossenen Gasmasse bewirkt wird, die sich bei Aenderungen des Wasserspiegels adiabatisch ausdehnt und zusammendrückt. Derartige Schwingungen treten in Windkesseln, in Wasserpumpen und ähnlichen Gebilden auf. Das Gleichgewicht der Kräfte ergibt die Beziehung

$$M \frac{d^2h}{dt^2} + P(h) = 0 \qquad (4),$$

[1]) J. Biermanns, Archiv für Elektrot. 1915, Bd. 3, S. 345.

wenn mit M die Wassermasse bei der Spiegelhöhe h und mit P der Ueberdruck im Gasraum bezeichnet wird, nötigenfalls vermehrt um das Uebergewicht der gehobenen Wassermasse. Die Charakteristik der Schwingung ist durch die Adiabate in Abb. 3 dargestellt. Veränderliche Spiegelquerschnitte lassen sich leicht in der Charakteristik berücksichtigen.

Zur Kupplung rotierender Wellen benutzt man häufig für die Uebertragung der Bewegung Leder, Gummi oder ähnliche Körper, bei denen Kraft und Dehnung nicht proportional sind. Abb. 4 zeigt zwei rotierende Massen mit den Trägheitsmomenten Θ_1 und Θ_2, die durch eine solche Kupplung mit der Kraft k verbunden sind, und stellt auch die Charakteristik dieser unelastischen Kupplung dar. Die Bewegungsgleichung läßt sich in die Form bringen

$$\frac{\Theta_1 \, \Theta_2}{\Theta_1 + \Theta_2} \frac{d^2 \varphi}{d t^2} + k(\varphi) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Wird eine der Massen vollständig fest gehalten, so ist ihr Trägheitsmoment unendlich groß anzusetzen, so daß nur die Wirkung des anderen übrig bleibt.

Die meisten Gelenke und Lagerungen besitzen zur Ermöglichung leichter Drehung ein geringes Spiel zwischen Zapfen und Schale, das in Abb. 5 vergrößert dargestellt ist. Es bewirkt einen toten Gang im Getriebe, der frei vom Eingriff der Kräfte durchlaufen wird. Die Bewegungsgleichung der Masse lautet hier

$$m \frac{d^2 s}{d t^2} + k(s) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

wobei jetzt die Charakteristik $k(s)$ durch den gebrochenen Linienzug in Abb. 5 dargestellt ist. Während des toten Ganges ist die Kraft Null, und außerhalb desselben herrscht eine mit der Federung proportional zunehmende Kraft[1]).

Entgegengesetzte Verhältnisse erhält man durch Verwendung von Federn mit Vorspannung, die sich nach Abb. 6 im Ruhezustand an einen Anschlag legen. Die Feder bewegt sich hierbei erst, wenn die Kraft der Vorspannung überwunden ist, so daß ein

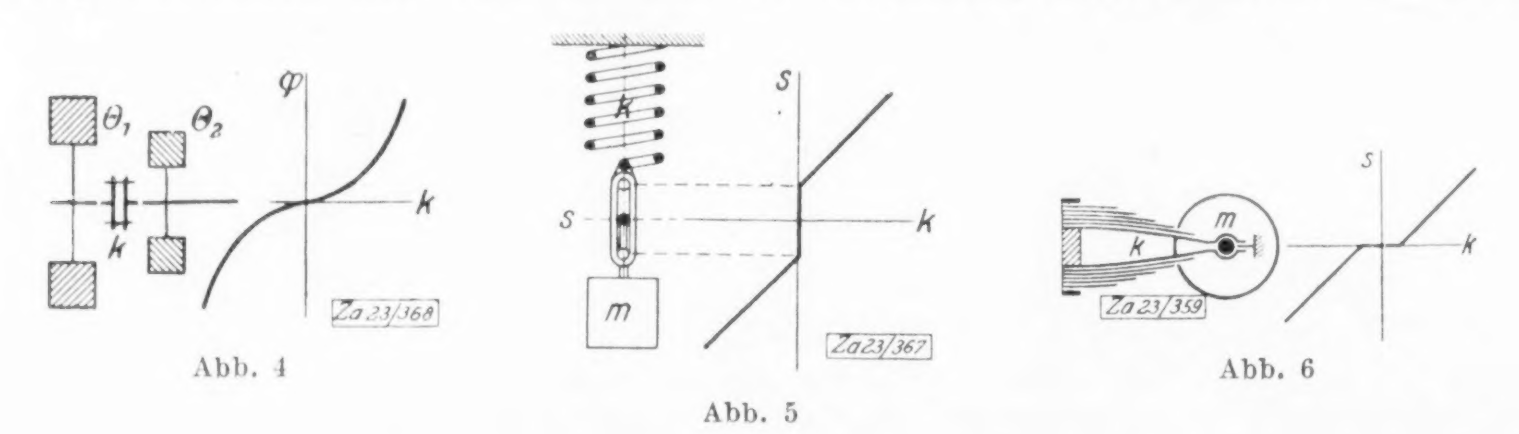


Abb. 4 Abb. 5 Abb. 6

bestimmter Mindestwert zur Auslenkung erforderlich ist. Ebenso wie beim toten Gang besteht die Charakteristik aus drei verschiedenen Linienstücken. Während dort ein gewisser Weg ohne Kraft durchlaufen wird, sind hier gewisse Kraftänderungen ohne Bewegung möglich[1]). Auch hier wird der Schwingungsvorgang durch Gleichung (6) beherrscht.

Außer in den hier dargestellten typischen Gebilden treten Schwingungen mit gekrümmter Charakteristik an vielen anderen technischen Bauwerken auf. Beispielsweise besitzen Gußeisen, Steine und Beton ganz ähnlichen Kraftverlauf wie die Charakteristik der Abb. 2 oder 4, so daß sie bei elastischer Beanspruchung entsprechenden Gesetzen gehorchen.

2. Integration der Grundgleichung für Eigenschwingungen. Sämtliche Gleichungen (1) bis (6) sind von demselben Typus

$$\frac{d^2 y}{d t^2} + \frac{x(y)}{\tau^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Darin bedeutet τ eine Eigenzeit, die vom Aufbau des speziellen Gebildes abhängt und jederzeit leicht angegeben werden kann. x und y sind die Variablen, deren

[1]) A. Wichert, E. T. Z. 1920, S. 976, und Sammelheft I des Ausschusses für techn. Mechanik des V. d. I. 1919, S. 26.

Zusammenhang untereinander bekannt ist und deren Abhängigkeit von der Zeit t durch Lösung der Differentialgleichung gesucht ist. Da die Charakteristik $x(y)$ in allen diesen Beispielen sehr verschiedenartigen Verlauf hat, der sich nicht durch eine einheitliche, einfach zu integrierende Funktion darstellen läßt, so wollen wir die Differentialgleichung (7) der Eigenschwingungen des Systems so umformen, daß sie graphisch auf möglichst einfache und doch genaue Weise behandelt werden kann. Wir erweitern sie zu dem Zweck mit $\dot{y} = dy/dt$ und erhalten

$$\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dt} + \dot{y}\frac{x}{\tau^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{y}\,d\dot{y} + \frac{1}{\tau^2}\,x\,dy = 0,$$

Dies gibt integriert

$$\frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{1}{\tau^2}\int x\,dy = 0,$$

so daß man für die Ableitung von y erhält

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \sqrt{-\frac{2}{\tau^2}\int x\,dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

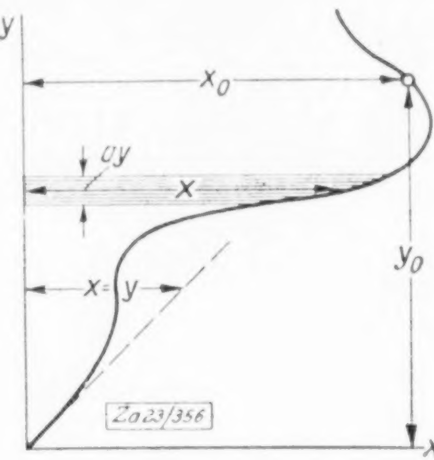


Abb. 7

Die Rechnungsoperation auf der rechten Seite dieser Gleichung ist leicht auszuführen. Man braucht nur zu der Kurve der Charakteristik nach Abb. 7 die Integralkurve nach y zu konstruieren und diese Kurve zu radizieren. Beginnt man dabei mit irgendeiner Amplitude y_0, so liegt dadurch die Anfangsbedingung fest, und wenn man nach abnehmenden Werten von y fortschreitet, also nach $-dy$ integriert, so wird hierdurch das negative Vorzeichen von selbst berücksichtigt.

Die rechte Seite von Gl. (8) stellt nunmehr eine graphisch bestimmte Funktion von y allein dar. Wir können daher nochmals integrieren und erhalten die laufende Zeit, abhängig vom jeweiligen Wert von y zu

$$t = \tau\int\frac{dy}{\sqrt{-2\int x\,dy}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Auch die Rechenoperation auf der rechten Seite dieser Gleichung ist graphisch leicht auszuführen. Man braucht nur zu der Wurzelkurve nach Gl. (8) die reziproke Kurve zu zeichnen und diese nochmals zu integrieren. Dann erhält man sofort die Integralkurve der Gl. (9). Wir können sie als numerische Schwingungszeit bezeichnen, die nur vom Kurvenverlauf der Charakteristik abhängt, während alle Systemkonstanten zu der Eigenzeit τ zusammengefaßt waren.

Wir wollen die Gl. (9) zunächst analytisch auf den Spezialfall einer geradlinigen Charakteristik anwenden, der z. B. in Abb. 7 vorliegt, solange man sich auf kleine Schwingungen in der Umgebung des Nullpunktes beschränkt. Dort ist $x = y$, so daß man mit einem Anfangswert y_0 als Integrationskonstante erhält

$$\int x\,dy = \int y\,dy = {}^1/_2\,(y^2 - y_0^2)\,.$$

Damit wird

$$t = \tau\int\frac{dy}{\sqrt{y_0^2 - y^2}} = \arccos\left(\frac{y}{y_0}\right) \quad \text{oder} \quad y = y_0\cos t/\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Für diese harmonische Sinusschwingung ist die Dauer der ganzen Schwingung

$$T = 2\,\pi\,\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

also das $2\,\pi$fache der Eigenzeit. Sie ist dabei unabhängig von der Größe der Schwingung, solange man im linearen Bereich der Charakteristik bleibt.

3. Auswertung von Beispielen. Für eine Reihe der obengenannten Beispiele wurden die Schwingungskurven nach Gl. (9) graphisch ausgewertet. Zunächst behandeln wir die elektrische Schwingung eines gesättigten Magnetkreises mit angeschalteter Kapazität nach Abb. 2. Anstelle des Magnetflusses Φ und des Stromes i der Gl. (3) wollen wir die für das Eisen spezifischen Größen der magnetischen Induktion B in Gauß und des erregenden Strombelages A in Amp/cm einführen. Bezeichnen wir mit q den Querschnitt und mit l die Länge des auf konstanten Querschnitt reduzierten magnetischen Kreises, so ist

$$\Phi = q\,B \quad \text{und} \quad A = \frac{w\,i}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Setzen wir dies in Gl. (3) ein, so erhalten wir

$$w\,q\,\frac{d^2 B}{d t^2} + \frac{l}{w\,C}\,A\,(B) = 0\,.$$

Durch Vergleich mit der Grundgleichung (7) ergibt sich daraus als Eigenzeit für den gesättigten magnetischen Schwingungskreis

$$\tau = \sqrt{C\,\frac{w^2\,q}{l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Wäre statt Eisen Luft in der Spule vorhanden, so würde dies die Wurzel aus Kapazität und Selbstinduktion darstellen, durch die bekanntlich die Eigenfrequenz harmonischer elektrischer Schwingungen in $2\,\pi$ sec bestimmt wird. Durch den Einfluß des Eisens tritt als Integral in Gl. (9) noch eine numerische Schwingungszeit hinzu, die wir aus der Magnetisierungskurve bestimmen wollen. Zu diesem Zweck ist in Abb. 8a diese Kurve für mittleres Transformatorenblech dargestellt. In Abb. 8b ist die Integralkurve hiervon, angefangen mit 20 000 Gauß, aufgetragen und in Abb. 8c radiziert. Abb. 8d stellt die reziproke Kurve hierzu dar, die in Abb. 8e wiederum integriert ist und nunmehr den Zusammenhang von Zeit und magnetischer Induktion darstellt. Jeder Zeit und jeder Induktion kann man nunmehr aus der Charakteristik den zugehörigen Strombelag A zu ordnen, und erhält dafür die eigentümlich spitze Kurvenform in Abb. 8f.

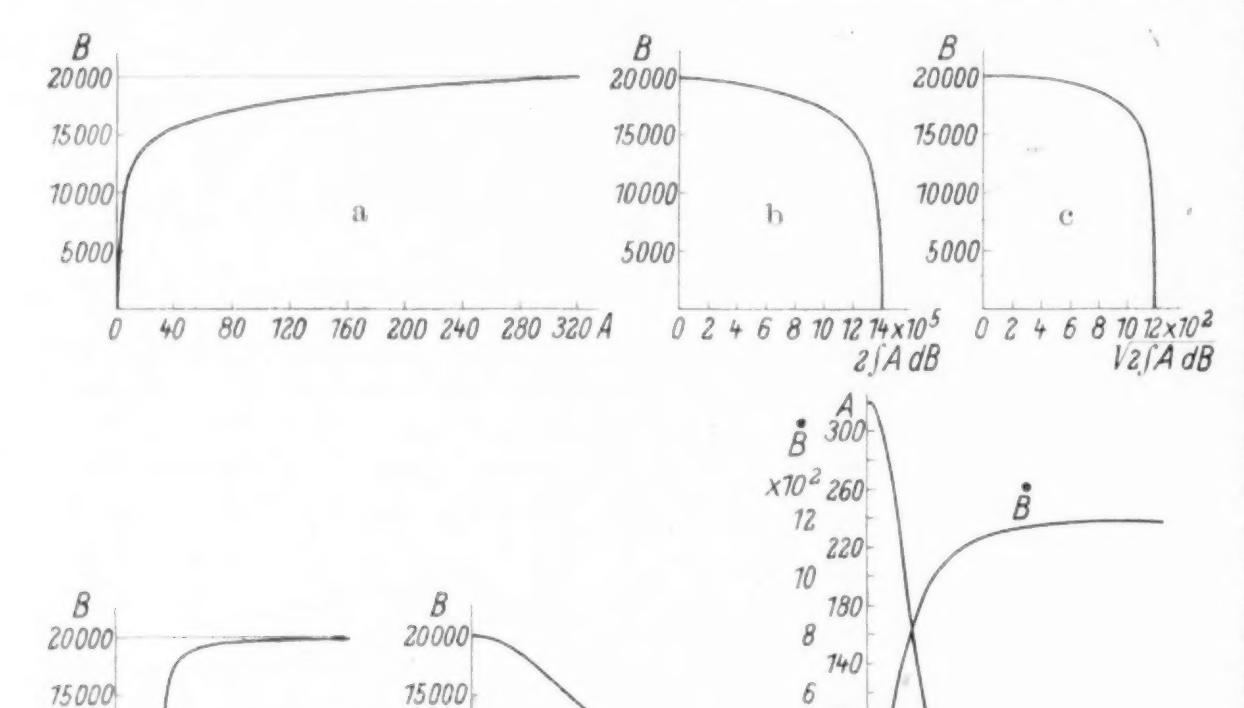


Abb. 8

Den Praktiker interessiert noch der Verlauf der Spannung an der Spule, die bestimmt wird durch

$$e = w\,\frac{d\,\Phi}{d\,t} = w\,q\,\frac{d\,B}{d\,t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Sie kann entsprechend Gl. (8) aus Abb. 8c abgegriffen werden und ist als $\dot{B}$ in Abb. 8f auf die variable Zeit übertragen.

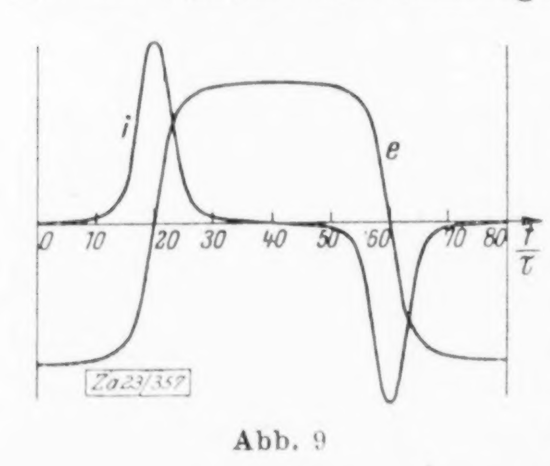


Abb. 9

Die Integrationen sind wegen der Symmetrie im Kurvenverlauf nur für eine Viertelperiode dargestellt. In Abb. 9 ist daraus der Verlauf von Strom und Spannung für eine ganze Periode zusammengesetzt. Die numerische Schwingungsdauer ergibt sich zu 80, während sie bei dem gleichen Schwingungskreise ohne Eisen nur $2\,\pi$ betragen würde. Der Strom besitzt eine spitze, die Spannung eine flache Kurvenform, während sie ohne Eisen beide sinusförmig verlaufen würden.

Die gleichen Auswertungen, die in Abb. 8a bis f für einen Anfangswert der Schwingung von 20 000 Gauß dargestellt sind, wurden auch für kleinere Amplituden durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abb. 10 zusammengestellt, in der die Kurvenformen der ersten Viertelperiode von Strom und Spannung übereinander aufgetragen sind. Man sieht, daß sich bei geringer werdender Amplitude die spitzen und flachen

Kurven immer mehr abschleifen und schließlich bei kleinen Schwingungen in einem sinus- oder cosinusförmigen Verlauf übergehen. Gleichzeitig nimmt die Dauer der Schwingungen sehr erheblich zu. Abb. 11 stellt die Abhängigkeit der numerischen Schwingungsdauer von der Amplitude der Induktion dar. Bis zu etwa 7000 Gauß bleibt die Schwingungsdauer konstant mit 271, was daher rührt, daß die Magnetisierungskurve bis dorthin einigermaßen geradlinig verläuft. Bei Schwingungen mit größerer Amplitude nimmt die Schwingungsdauer mehr und mehr ab, die Eigenfrequenz der Anordnung wird also größer und größer.

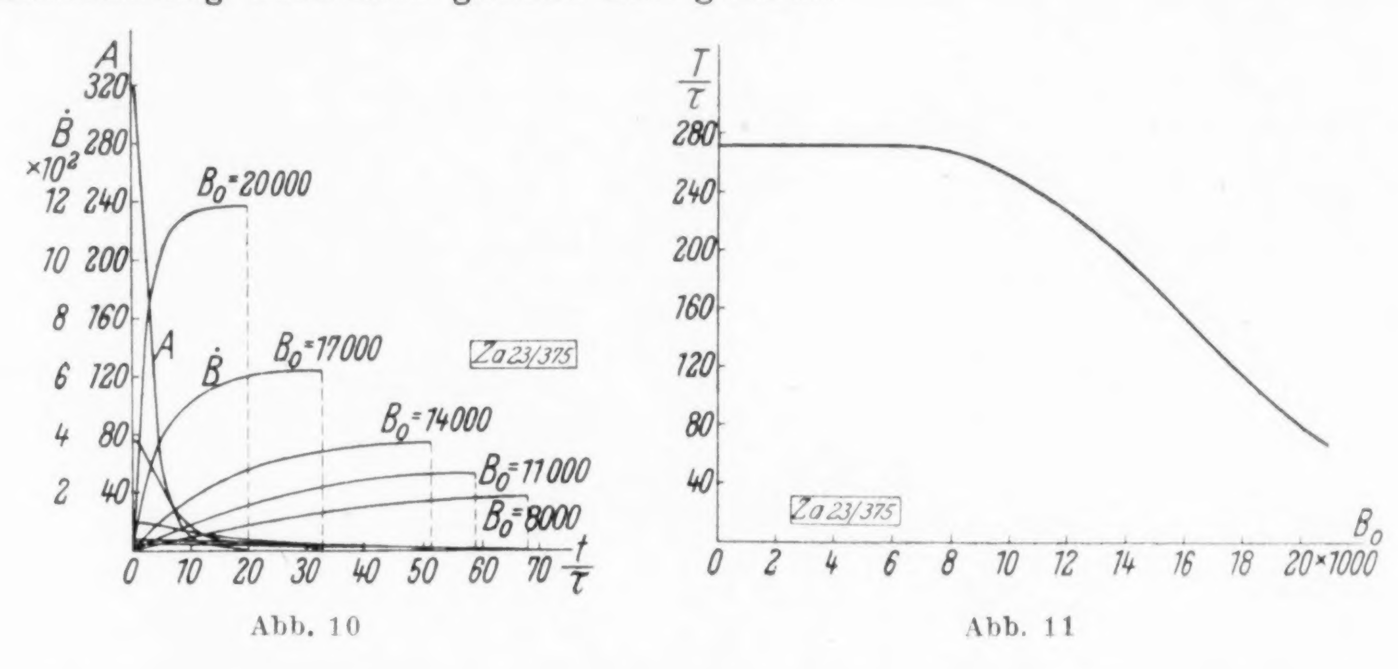


Abb. 10 Abb. 11

Wir erkennen aus dieser Untersuchung, daß elektrische Eigenschwingungen in magnetisch gesättigten Schwingungskreisen nur bei kleiner Amplitude harmonisch sind und konstante Eigenfrequenz besitzen, daß die Kurvenform der Schwingungen sich jedoch mit zunehmender Amplitude mehr und mehr verzerrt, und daß gleichzeitig die Eigenschwingungen schneller und schneller werden. Diese beiden Kennzeichen, verzerrte Kurvenform und Abhängigkeit der Eigenfrequenz von der Amplitude, sind Eigenschaften aller unharmonischen Schwingungen.

Als zweites Beispiel wollen wir adiabatische Luftschwingungen der Anordnung von Abb. 3 untersuchen, die der Differentialgleichung (4) gehorchen. Bezeichnen wir die schwingende Oberfläche mit f, so können wir den spezifischen Druck p der eingeschlossenen Luft einführen durch

$$P(h) = f\,p(v) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15).$$

Gleichzeitig führen wir dabei anstelle der Spiegelhöhe h das spezifische Volumen v des Gases ein durch

$$f\,d\,h = m\,d\,v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16),$$

worin m die Gasmasse bezeichnet. Dann erhalten wir aus Gl. (4)

$$\frac{M\,m}{f}\,\frac{d^2 v}{d\,t^2} + f\,p(v) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17),$$

und dies geht in die allgemeine Grundgleichung (7) über, wenn wir setzen

$$\tau = \frac{\sqrt{M\,m}}{f} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18).$$

Die Eigenzeit hängt also vom Produkt der schwingenden Wasser- und Gasmassen, bezogen auf ihre Berührungsfläche, ab, sie wird also im wesentlichen vom geometrischen Mittel der Längen von Gassäule und Wassersäule bestimmt.

In Abb. 12a bis 12e ist nun die Integration der Druck-Volumenkurve entsprechend Gl. (9) nach dem gleichen Schema, das in Abb. 8 benutzt wurde, durchgeführt. Man erhält in Abb. 12e aus der Integration unmittelbar die Kurve des Gasvolumens v, die gleichzeitig die Höhe des Wasserspiegels angibt, und durch Uebertragung der zugehörigen Druckwerte aus Abb. 12a die sehr spitz verlaufende Druckkurve p der Luft, schließlich aus Abb. 12c die Geschwindigkeitskurve c des Wassers. Man sieht, daß alle Kurven unsymmetrisch zur Nullachse verlaufen und daß sich in der Druckkurve sehr scharfe positive Spitzen ausbilden, während ein negativer breiter Sattel vorhanden ist. Die schwingende Wassersäule wird hiernach bei der Kompression des Gases sehr plötzlich reflektiert, weil der Gasdruck bei abnehmendem Volumen außerordentlich rasch anwächst.

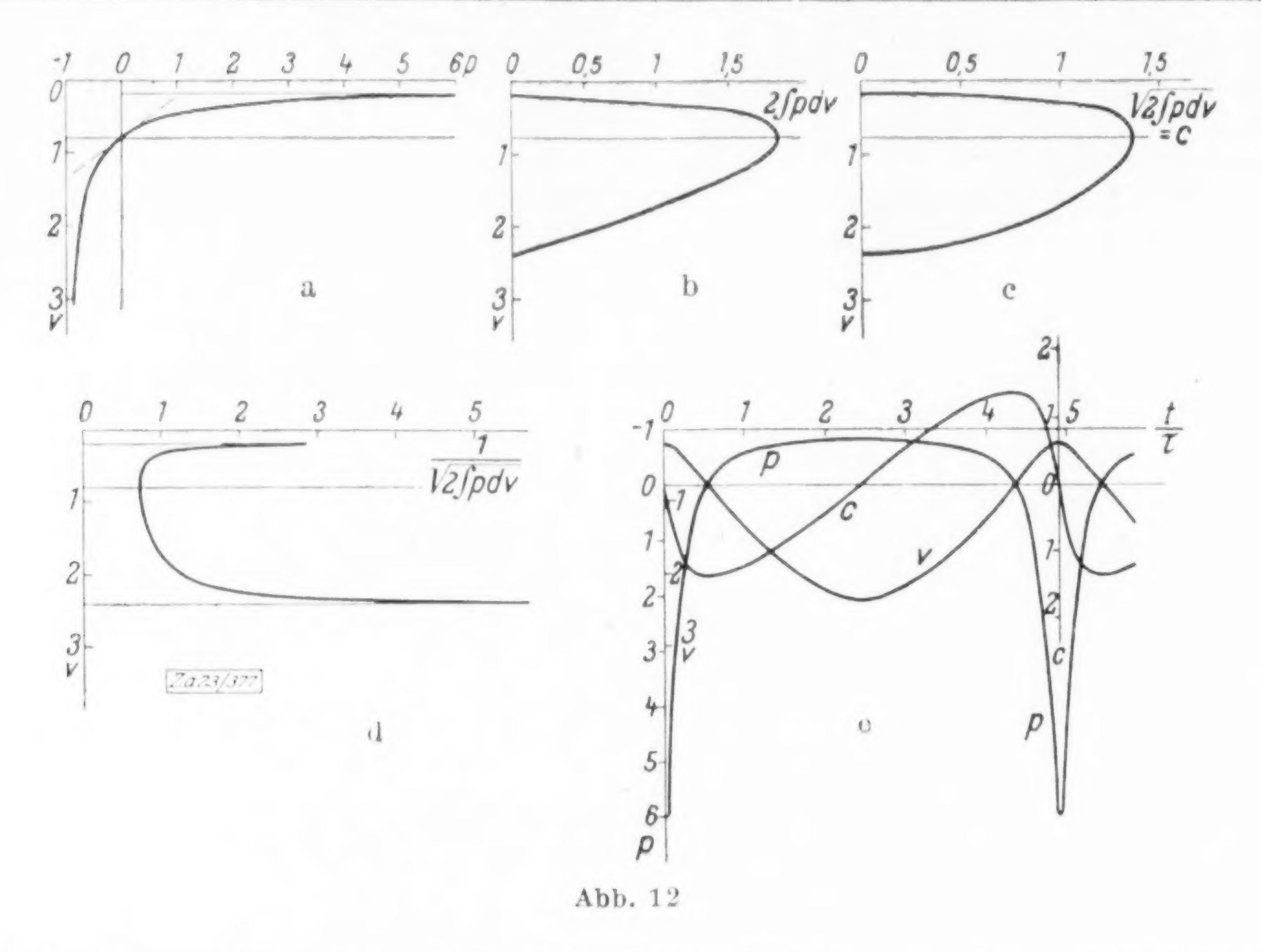


Abb. 12

Er bewirkt eine sehr rapide Geschwindigkeitsänderung. In den Unterdruckgebieten ändert sich der Druck jedoch nur langsam, so daß er die Wassermasse auch nur allmählich verzögert.

Die Abb. 12 bezieht sich auf einen anfänglichen Ueberdruck der Luft von 6 atm. Für geringere Ueberdrucke sind die zugehörigen Druckschwingungskurven in Abb. 13 zusammengestellt. Man sieht, daß nur bei kleinen Schwankungen von der Größenordnung $^1/_{10}$ atm nahezu sinusförmige Schwingungen vorhanden sind, daß sich bei großen Druckschwankungen dagegen stets scharf ausgeprägte Druckspitzen ausbilden. Auffälligerweise hängt die Eigenschwingungsdauer dieser Druckschwingungen nur in geringem Grade von der Amplitude ab. Zwar werden die Ueberdruckgebiete mit zunehmender Amplitude sehr viel kürzer, dafür dauern aber die Unterdruckzeiten um so länger. Die Summe beider Zeiten ändert sich nach Abb. 14 nur recht wenig, so daß diese adiabatischen Druckschwingungen angenähert isochron verlaufen.

Die zuletzt behandelten Druckschwingungen besitzen bei einem elektrotechnischen Problem erhebliche Bedeutung, nämlich bei dem Ausschaltvorgang im Oelschalter. Der unter Oel brennende

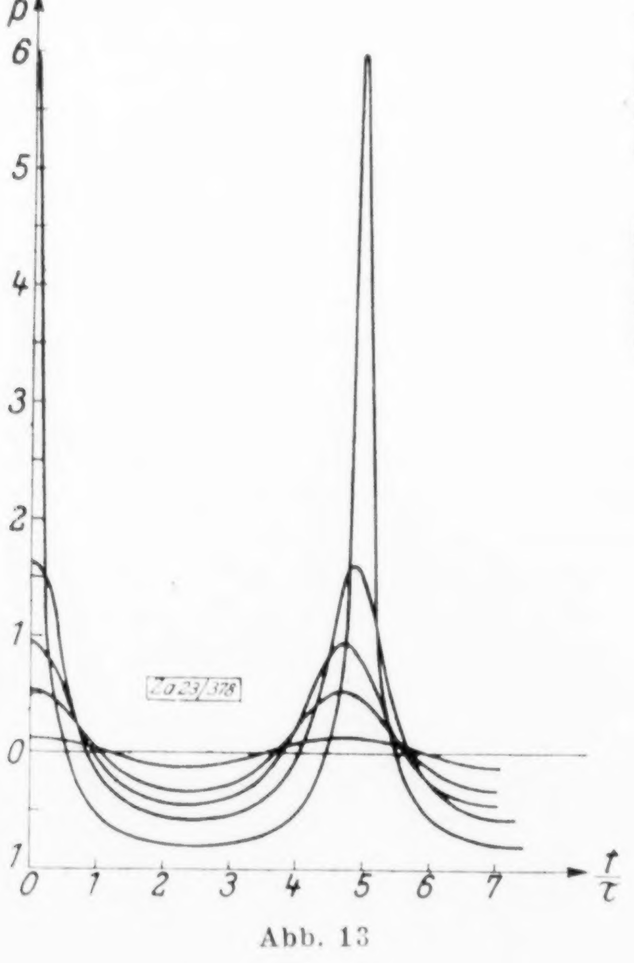


Abb. 13

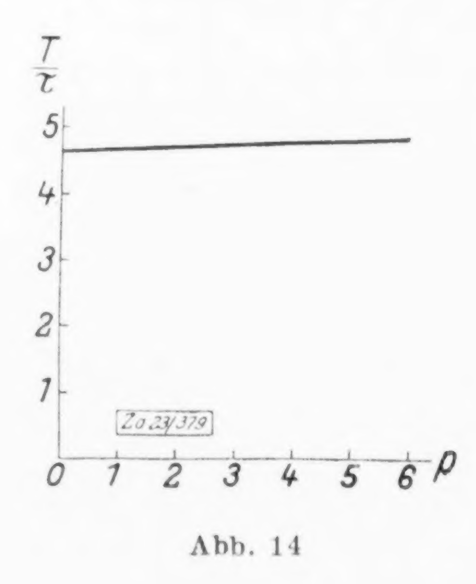


Abb. 14

Lichtbogen bildet eine Gasblase, die mit dem umgebenden Oel Eigenschwingungen ausführen kann. Dabei verkleinern und vergrößern sich in ihrem Innern abwechselnd Volumen und Druck. Da nun die elektrische Spannung im Lichtbogen stark vom Druck abhängt, so entsprechen den Druckspitzen der Abb. 14 auch starke Spannungssteigerungen. Man kann zeigen, daß die Schwingungen durch die Stromwärme des Lichtbogens selbsterregend werden können. Sie arbeiten sich dann zu immer höheren Druck- und Spannungsspitzen herauf, die schließlich den durchfließenden Strom zum Erlöschen bringen. Abb. 15 zeigt ein Oszillogramm des Enstehens und Ab-

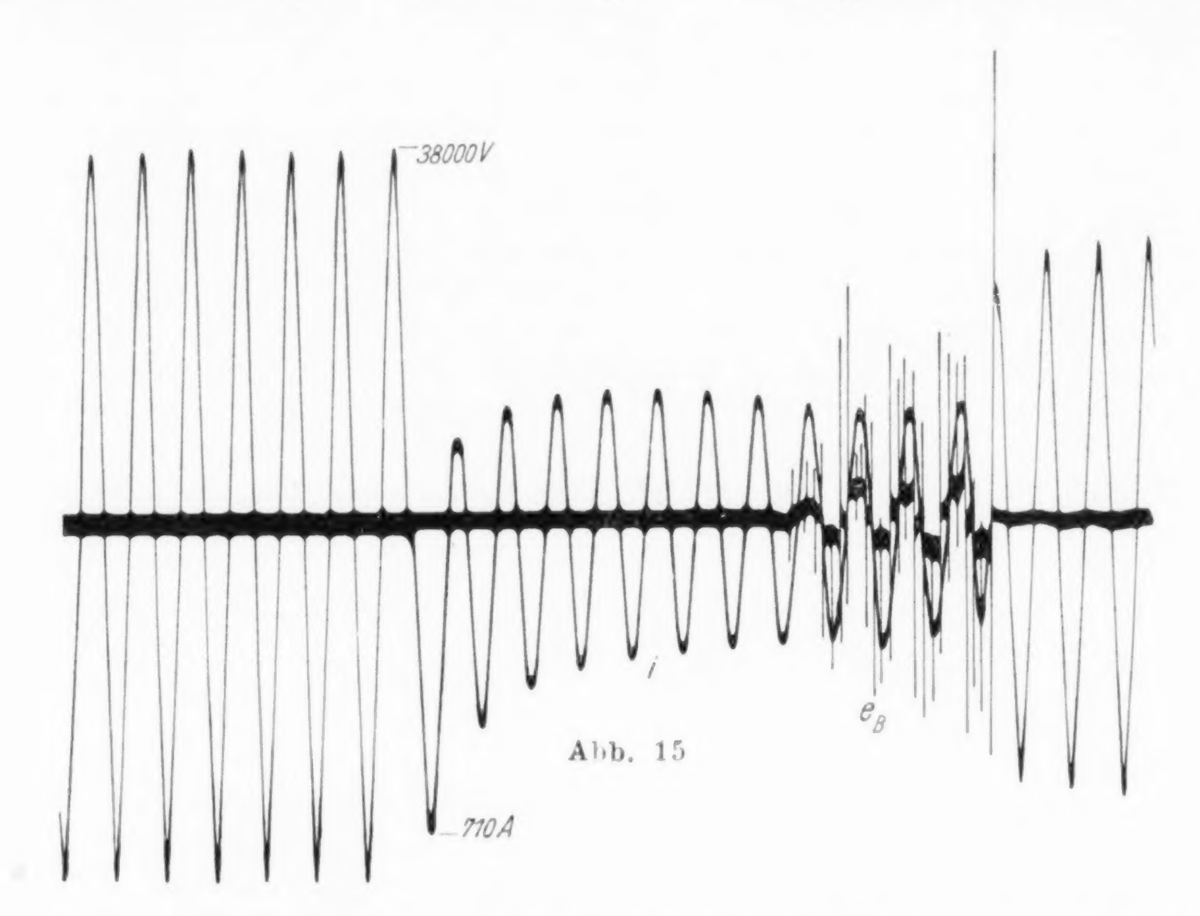


Abb. 15

schaltens eines schweren Kurzschlußstromes. Beim Schließen des Schalters verschwindet die vorherige Wechselspannung von 38000 V und es entwickelt sich ein Kurzschlußstrom von 710 A, der allmählich abklingt. Nach $7^1/_2$ Wechselstromperioden beginnt der Schalter wieder zu öffnen, so daß ein Lichtbogen entsteht, der nun eine Reihe von scharfen Spannungsspitzen erzeugt, die immer größer werden und schließlich die Unterbrechung des Stromes bewirken. Durch künstliche Verstärkung des Druckes im Lichtbogen versucht man in neuerer Zeit, ein möglichst schnelles Löschen und Ausschalten des Stromes zu erzielen.

Die reziproken Kurven von Abb. 8d und 12d nähern sich den Endwerten des Volumens asymptotisch. Ihre Integration ist daher in diesen Bereichen graphisch schwer durchzuführen, weil die Fläche gegenüber der Asymptote sehr lang und schmal wird und nur ungenau zu bestimmen ist. Es ist deshalb zweckmäßiger, die Integralkurve in unmittelbarer Nähe der Umkehrpunkte der Schwingung analytisch zu bestimmen. Da sich dort x und y nur wenig ändern, so darf man im Integral von Gl. (14) im Umkehrpunkte $x = x_0$ als unveränderlich ansehen und erhält dort

$$\frac{t}{\tau} = \int \frac{d\,y}{\sqrt{2\,x_0\,y}} = \sqrt{\frac{2\,y}{x_0}} \quad \text{oder} \quad y = \frac{x_0}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \quad \ldots \ldots \quad (19),$$

was natürlich mit dem gewöhnlichen Fallgesetz bei konstanter Kraft übereinstimmt. Die y-Kurve hat also in den Umkehrpunkten stets parabolischen Charakter und kann dort aus dem bekannten Wert von x_0 errechnet werden. Nach diesen Formeln sind sämtliche Kurven der dargestellten Beispiele gezeichnet worden.

In Abb. 16 sind nach der gleichen Methode wie bisher die Schwingungskurven eines Materials dargestellt, das dem Hookschen Gesetze nicht gehorcht, wie man es bei Gußeisen, Beton, Steinen, Leder, Gummi usw. findet. Während die Dehnungs- oder Wegkurve ε einigermaßen sinusförmig erscheint, weicht die Kraft- oder Spannungskurve σ merklich von der harmonischen Form ab. Da sich auch hier die Schwingungsdauer erheblich mit der Amplitude ändert, so sind derartige Materialien nicht

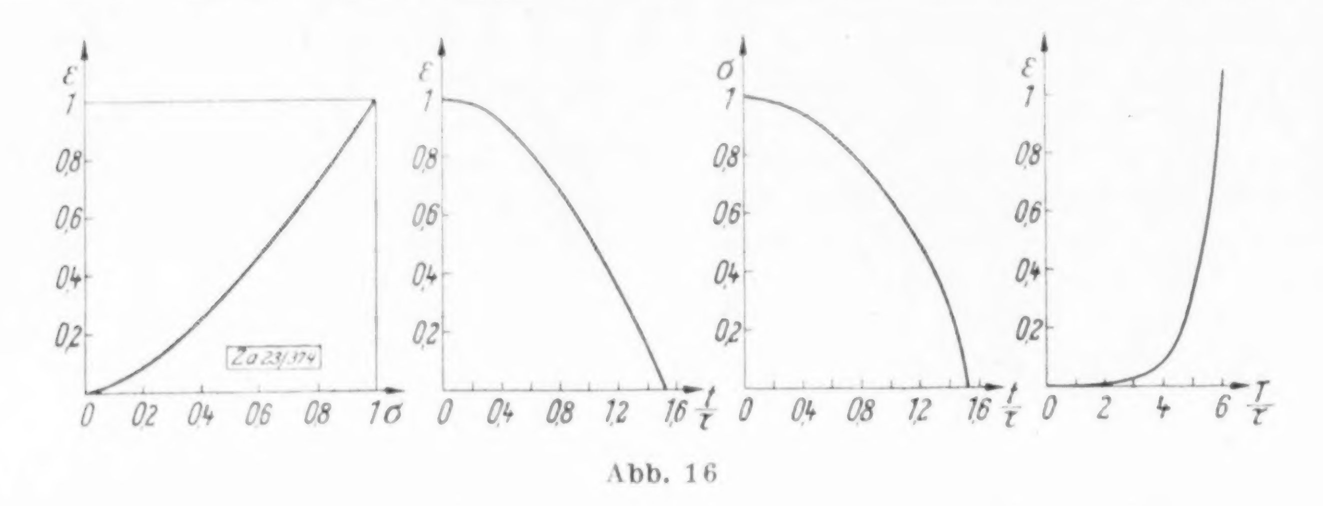


Abb. 16

resonanzfähig im Sinne der elementaren Theorie. Denn wenn auch kleine Schwingungen die gleiche Schwingungsdauer wie irgendeine äußere Wechselkraft besäßen, so würde sich die Resonanz beim Heraufarbeiten der Amplitude sofort verlieren, weil die Eigenschwingungsdauer sich mit zunehmender Amplitude ändert. Dies ist vermutlich die Ursache, weshalb Bauwerke und Maschinenteile, die aus den ebengenannten Stoffen bestehen, wesentlich weniger zum Mitschwingen neigen als Teile aus Stahl, Fluß- oder Schmiedeeisen, die bekanntlich dem Hookschen Gesetz sehr genau gehorchen und daher stark resonanzfähig sind.

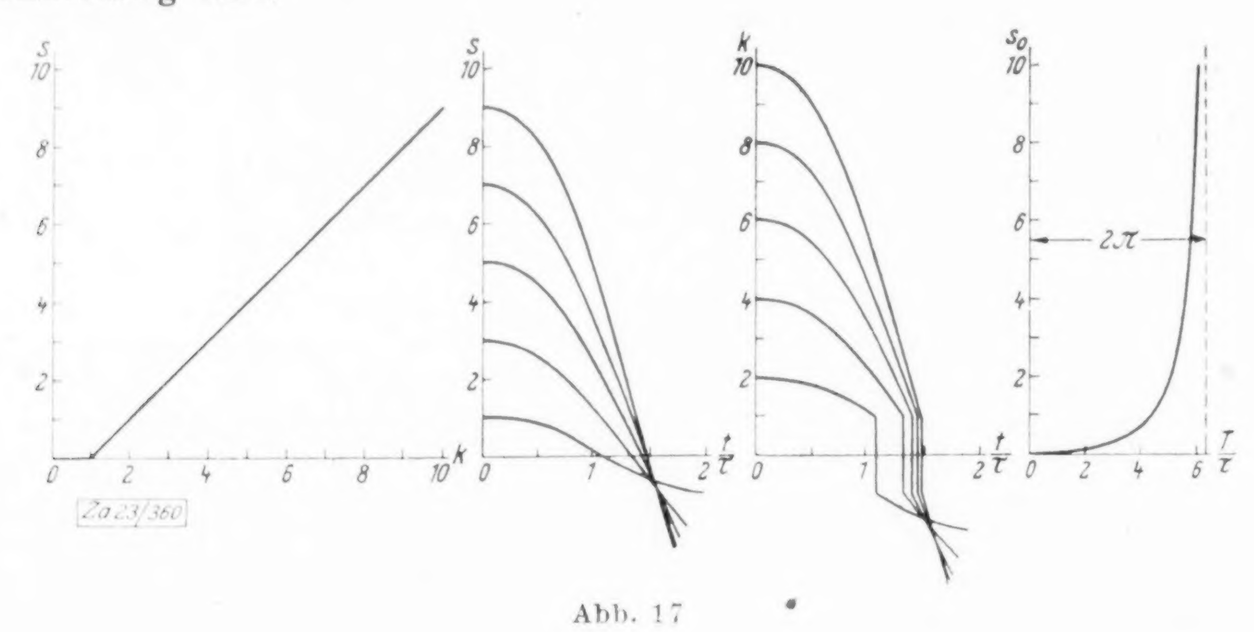


Abb. 17

In Abb. 17 sind die Schwingungskurven dargestellt, die bei elastischen Schwingungen mit Vorspannung der Feder auftreten, und Abb. 18 zeigt die elastischen Schwingungen bei totem Gang im System. In beiden Fällen ist der Schwingungsverlauf auf dem geradlinigen Teil der Charakteristik sinusförmig und läßt sich auch leicht analytisch behandeln. Bei der vorgespannten Feder setzen sich die Wegkurven nach Abb. 17 b glatt, die Kurvenstücke der Kraftschwingung nach Abb. 17 c unstetig aneinander. Bei dem toten Gang verlaufen die Wegkurven nach Abb. 18 b in der Umgebung der Nullinie geradlinig, in den Kraftkurven bilden sich nach Abb. 18 c Lücken aus. In beiden Fällen ist die Schwingungsdauer stark abhängig von der Amplitude der Schwingung. Bei großen Schwingungen nähert sich die numerische Schwingungs-

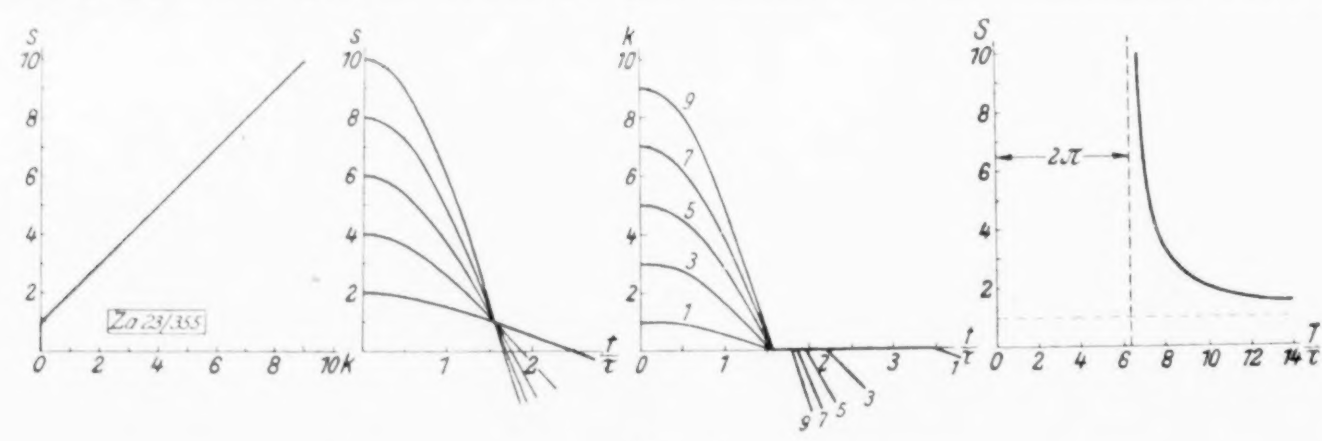


Abb. 18

dauer nach Abb. 17d und 18d dem Werte 2π, mit abnehmender Amplitude nimmt sie bei Schwingungen mit Vorspannung bis auf Null ab, und bei totem Gang bis auf unendlich zu. Bei Schwingungen mit Vorspannung sind daher kleine Schwingungen schneller als große, bei Schwingungen mit totem Gang sind kleine Schwingungen langsamer als große.

4. Näherungslösung für erzwungene Schwingungen. Wenn auf das schwingungsfähige System eine äußere periodische Kraft mit der Frequenz ω wirkt, so läßt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d t^2} + x(y) = z(\omega t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

für jeden gegebenen Verlauf der Funktionen x und z durch schrittweise Zeichnung stets angenähert integrieren[1]). Die Kurvenform der erzwungenen Schwingung ergibt sich dann ähnlich wie bei der bisher behandelten freien Schwingung, vor allem in den Fällen großer Amplitude, in denen kleine äußere Kräfte relativ große Schwingungsausschläge hervorrufen.

Da die Eigenfrequenz des Systems nach den frühren Erläuterungen im allgemeinen stark von der Schwingungsamplitude abhängt, so ist es allerdings fraglich, ob so große Amplituden, wie sie sich bei harmonischen Schwingungen durch Resonanz entwickeln können, hier jemals auftreten. Denn das Heraufarbeiten der Schwingungen bei Resonanz beruht auf der Uebereinstimmung der von außen erzwungenen Frequenz mit der Eigenfrequenz des Systems und kann sich daher bei variabler Eigenfrequenz nicht mehr ungestört entwickeln. Stimmt die Eigenfrequenz irgendwann mit der erzwungenen Frequenz überein, so hat die Schwingung allerdings zunächst die Tendenz, sich zu vergrößern. Dabei ändert sich aber sofort die Eigenfrequenz, so daß der Resonanzfall nicht mehr vorliegt. Man sieht hieraus, daß die erzwungenen unharmonischen Schwingungen sich völlig anders verhalten wie harmonische, daß insbesondere die Ausbildung von Resonanzschwingungen wegen der variablen Eigenfrequenz unmöglich ist.

Man kann nun zwar den Verlauf der Schwingungen nach der Differentialgleichung (20) für jeden gegebenen Fall näherungsweise aufzeichnen. Man erhält dann für beliebige Anfangsbedingungen das vollständige Einschwingen bis in den stationären Zustand hinein. Nun interessiert aber in der Praxis besonders die Frage des stationären Verlaufs der erzwungenen Schwingungen, vor allem seine Abhängigkeit von der Amplitude und Frequenz der Störungsfunktion z. Ein solcher Ueberblick würde nach dem Integrationsverfahren nur unter großem Aufwand von zeichnerischer Arbeit zu erzielen sein. Auch die angenäherte Lösung durch Ersetzen der Funktion $x(y)$ der Gl. (20) durch die ersten Glieder einer Potenzreihe befriedigt nur in wenigen Fällen, da diese Näherung für größere Schwingungen, auf die es bei der Untersuchung gerade ankommt, im allgemeinen nicht ausreicht[2]).

Wir wollen deshalb die Gl. (20) in der Weise näherungsweise lösen, daß wir vom genauen Verlauf der Schwingung in jeder Periode absehen und nur den Zusammenhang der Amplituden der Schwingungsgrößen verfolgen. Wenn die Störungsfunktion z harmonischen Verlauf mit der Frequenz ω besitzt, so wird im stationären Zustand auch x und y periodisch mit der Frequenz ω verlaufen. Ihr zeitlicher Verlauf wird zwar nicht harmonisch sein, aber trotzdem wird der zweite Differentialquotient von y einigermaßen proportional dem Quadrat der Frequenz ω sein. Wir können daher an Stelle der Gleichung (20) für die Amplituden X und Y der Schwingung und Z der Störungsfunktion näherungsweise schreiben

$$-\omega^2 Y + X(Y) = Z \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21).$$

Darin ist jetzt mit $X(Y)$ der Zusammenhang der Amplituden der schwingenden Größen bezeichnet, der nicht vollständig identisch mit dem Zusammenhang $x(y)$ der Momentanwerte ist, der aber durch einen Versuch ebenso bequem experimentell festgestellt werden kann wie dieser.

Diese Beziehung (21) läßt sich nun auf anschaulichste Weise in einem Amplitudendiagramm graphisch darstellen und lösen. Wir schreiben sie dazu

$$X(Y) = Z + \omega^2 Y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

[1]) E. Meißner, Schweizer Bauzeitung 1913, S. 199 und L. Gümbel, Zeitschr. Ver. deutsch. Ingen. 1919, S. 771.

[2]) G. Duffing, Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Braunschweig 1918.

In Abb. 19 ist die linke Seite durch die Kurve der Amplitudencharakteristik dargestellt, während die rechte Seite für jeden Wert von Amplitude Z und Frequenz ω der äußeren Kraft durch eine geneigte gerade Linie wiedergegeben wird. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Charakteristik stellen die Lösung der Gleichung (22) dar und liefern daher diejenigen Amplituden X und Y der Schwingung, die sich stationär einstellen.

Abb. 19

Bei harmonischen Schwingungen mit Proportionalität zwischen X und Y, also

$$X(Y) = \nu^2 Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

ist nur ein einziger Schwingungszustand möglich, der durch den Schnittpunkt 2 mit der gestrichelten Geraden in Abb. 19 gegeben ist, und für den sich auch analytisch durch Einsetzen von Gleichung (23) in (22) ergibt

$$Y = \frac{Z}{\nu^2 - \omega^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Bei unharmonischen Schwingungen treten dagegen je nach der Größe von Amplitude und Frequenz der erzwungenen Schwingung und der Form der Schwingungscharakteristik ein, zwei oder gar drei Schnittpunkte und stationäre Schwingungszustände auf. Eine nähere Untersuchung zeigt allerdings, daß nicht alle diese Zustände stabil sind. In Abb. 19 liefern die Punkte 1 und 2 stabile Schwingungen, während Punkt 3 labil ist, weil sich bei einer kleinen Abweichung von diesem Punkte die störenden Kräfte schneller ändern als die widerstehenden.

Abb. 20

Während bei harmonischen Schwingungen und der linearen gestrichelten Charakteristik der Abb. 19 der stabile Schnittpunkt 2 mit abnehmender Frequenz ω immer weiter und weiter herausrückt und sich für den Resonanzfall $\omega = \nu$ im Unendlichen verliert, bleiben bei der unharmonischen Schwingung die Schnittpunkte stets im Endlichen oder sie verschwinden gänzlich. Bei großer Frequenz sind beispielsweise nach Abb. 19 zwei stabile Schwingungen, die den Punkten 1 und 2 entsprechen, möglich. Welcher Zustand in Wirklichkeit auftritt, ist Sache des Zufalls. Durch kleine äußere Einflüsse, wie Phasenänderung, Stöße, Schalt- oder Anlaufvorgänge kann ein plötzliches Umkippen des einen in den andern Schwingungszustand erfolgen. Verkleinert man die Frequenz ω, so wird die Schwingung 1 schwächer, die Schwingung 2 wächst zunächst an, verschwindet jedoch bald gänzlich, so daß für geringe Frequenz nur ein einziger Zustand möglich ist. Ein Resonanzzustand mit außerordentlich großen Amplituden der Schwingung tritt im ganzen Bereich der Frequenzen nirgends mehr auf.

Man kann eine Geschwindigkeitsdämpfung der Schwingung leicht im Amplitudendiagramm mit berücksichtigen. Die Differentialgleichung lautet dann

$$\frac{d^2 y}{d t^2} + \delta \frac{d y}{d t} + x(y) = z(\omega t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Daraus ergibt sich mit der gleichen Näherung wie eben die Amplitudengleichung

$$-\omega^2 Y + i \delta \omega Y + X(Y) = Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Es interessiert uns vor allem der absolute Betrag der Amplituden, den wir durch Quadrieren erhalten zu

$$[X(Y) - \omega^2 Y]^2 + [\delta \omega Y]^2 = Z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Dies schreiben wir für die graphische Darstellung besser

$$X(Y) = \sqrt{Z^2 - (\delta \omega Y)^2} + \omega^2 Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Darin wird die Wurzel durch eine Ellipse wiedergegeben.

An Stelle der geraden Linie müssen wir also jetzt nach Abb. 20 eine schräg liegende Ellipse zum Schnitt mit der Schwingungscharakteristik bringen, deren Achsen im wesentlichen durch die Stärke der äußeren Kraft und die Dämpfung, und deren Neigung durch die Frequenz bestimmt wird. Es genügt, wenn wir die Kurven nach Abb. 20 nur in einem Quadranten zeichnen, da wir dort bereits alle drei charakteristischen Schnittpunkte erhalten. Man erkennt, daß die Amplituden der Schwingungen

durch den Einfluß der Dämpfung begrenzt werden, da trotz Vergrößerung der Frequenz der stabile Zustand 1 nicht über ein gewisses Maß hinauswachsen kann. Die Mehrdeutigkeit der Zustände bleibt jedoch im allgemeinen bestehen.

5. Anwendungsbeispiele. Als Beispiel für den Verlauf von erzwungenen unharmonischen Schwingungen betrachten wir wieder den elektrischen Schwingungskreis mit magnetischer Sättigung[1]) nach Abb. 21. Das Gleichgewicht der Spannungen liefert mit den Bezeichnungen dieser Abbildung die Gleichung $E = E_L + E_C$. Die Spannung E_L an der eisengesättigten Selbstinduktion ist graphisch in Abhängigkeit vom Strom J durch die Magnetisierungskurve $\Phi(J)$ gegeben, während die Spannung am Kondensator negativ proportional dem Strom und umgekehrt proportional dem Produkt von Kreisfrequenz und Kapazität ist. Man erhält also

$$E_L = \Phi(J) = E + \frac{J}{\omega C} \qquad (29).$$

Diese Beziehung ist in Abb. 22 graphisch dargestellt, und zwar für verschieden starke Kapazitätswirkung und dementsprechend verschiedene Lagen der Kapazitätsgeraden.

Würde die Wechselspannung der Stromquelle E lediglich auf die Drosselspule wirken, so würde diese einen Magnetisierungsstrom J_μ aufnehmen, der durch den Abschnitt der Spannung E auf der Charakteristik der Drosselspulen bestimmt wird. Würde andererseits die Spannung E nur auf den Kondensator wirken, so würde dieser einen Ladestrom

$$J_\lambda = -\omega C E \qquad (30)$$

aufnehmen, der gerade durch den jeweiligen Abschnitt der Kapazitätsgeraden auf der Abszissenachse wiedergegeben wird. Da man für jeden beliebigen Kondensator den Ladestrom kennt, so läßt sich daraus die Lage der Kapazitätsgeraden in Abb. 22 ohne jede Rechnung bestimmen.

Abb. 21

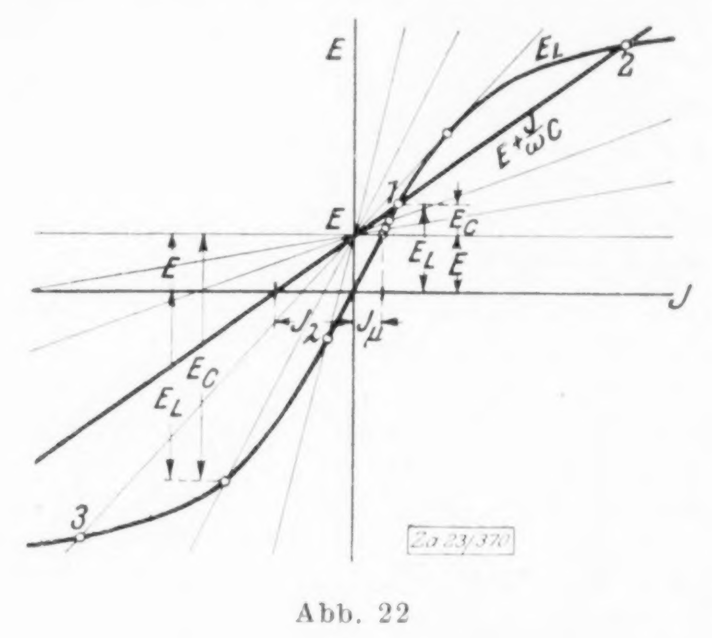


Abb. 22

Bei sehr kleinem Ladestrom ist nur ein einziger stabiler Schnittpunkt vorhanden, der relativ geringe Spannungen und Ströme ergibt. Bei sehr großem Ladestrom tritt der andere stabile Schnittpunkt in Erscheinung, der ebenfalls nur mäßige Ströme und Spannungen ergibt. Die weit außen liegenden Schnittpunkte würden verschwinden, wenn man den Leitungswiderstand des Stromkreises mitbetrachtete, der die unendliche Kapazitätsgerade zu einer endlichen Ellipse krümmt. Bei mittelgroßen Ladeströmen J_λ dagegen, besonders bei solchen, die etwas größer als der Magnetisierungsstrom J_μ der Drosselspule sind, können die Schnittpunkte mit der Magnetcharakteristik so ungünstig liegen, daß sehr hohe Ströme und damit auch erhebliche Ueberspannungen im Stromkreise auftreten. Allerdings können dieselben niemals den gefährlichen Charakter annehmen, den sie bei Abwesenheit von Sättigung im Eisen und geradliniger Magnetcharakteristik im Resonanzfall erreichen können.

Unangenehm ist es für den praktischen Betrieb, daß der Zustand des Systems bei mittelgroßen Ladeströmen durch kleine Aenderungen oder zufällige Störungen des Stromkreises vom einen in den anderen stabilen Zustand umkippen kann. In Abb. 23 und 24 sind Strom und Kondensatorspannung abhängig von der Frequenz bei sonst konstant gehaltenen Systemgrößen dargestellt. Dabei sind die stabilen Zustände ausgezogen, die labilen gestrichelt gezeichnet. Der Verlauf der Kurven ist mathematisch ganz ähnlich wie bei der harmonischen Schwingung, jedoch sind die Resonanzkurven durch den

[1]) J. Bethenod, Eclairage Electrique 1907, Bd. 53, S. 289. — J. Martienssen, Phys. Zeitschr. 1910, Bd. 11, S. 448. — F. Morgand, Rev. Gén. d'Électr. 1921, Bd. 9, S. 635.

Einfluß der magnetischen Sättigung abgebogen. Dadurch ergibt sich die Unmöglichkeit einer wirklichen Resonanz, jedoch entstehen bei größeren Frequenzen zwei verschiedene endliche Schwingungszustände, deren einer mit geringen, deren anderer mit großen Strömen und Spannungen verknüpft ist. Abb. 25 stellt in gleicher Weise

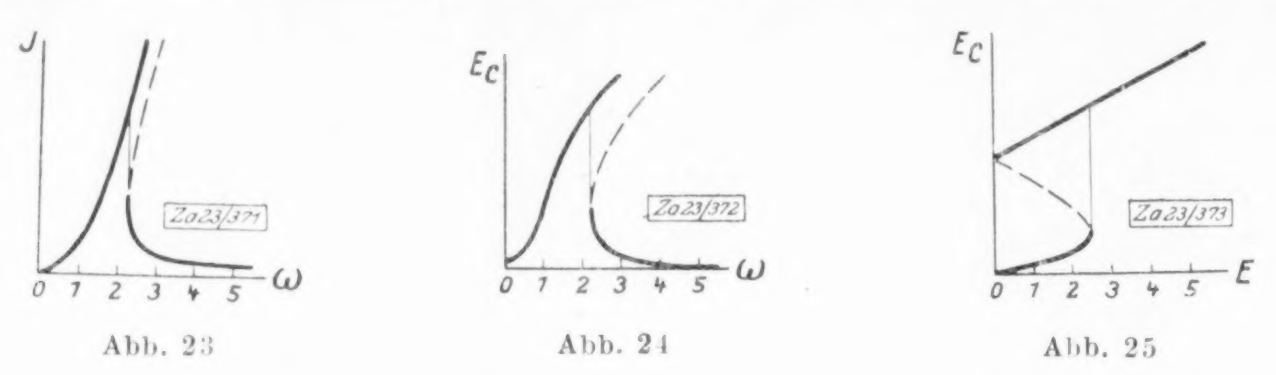


Abb. 23 Abb. 24 Abb. 25

die Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der aufgeprägten Spannung E dar, während alle anderen Systemgrößen unverändert bleiben. Während bei ungesättigtem Magnetkreis stets Proportionalität aller Spannungen vorhanden ist, ergibt sich hier ein höchst eigenartiger Verlauf der Erscheinung. Bei Vergrößerung der Spannung über ein bestimmtes Maß kippt der Zustand geringer Ströme stets in den sehr entfernten zweiten Zustand großer Ströme um. Beim Rückgang der Spannung kann sich dieser jedoch weiter erhalten. Das System zeigt also Hysteresis bei Spannungsänderungun.

Beim Antrieb langer Wellenleitungen durch Kolbenmaschinen, wie es z. B. bei Unterseebooten vorkommt, können sich unangenehme Torsionsschwingungen einstellen. In Abb. 26 ist im Schema dargestellt, wie ein Dieselmotor mit dem periodischen Drehmoment p über ein Schwungrad mit dem Trägheitsmoment Θ_1 eine Wellenleitung antreibt, deren elastische Kraft k von ihrem Verdrehungswinkel φ abhängt, und die am Ende auf einen Propeller mit der periodischen

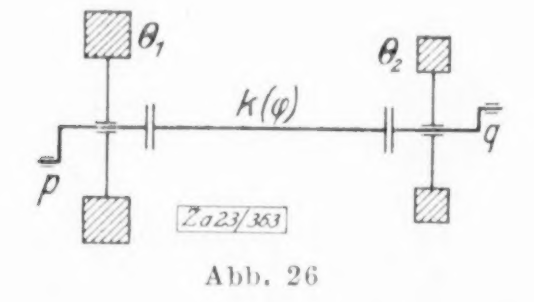


Abb. 26

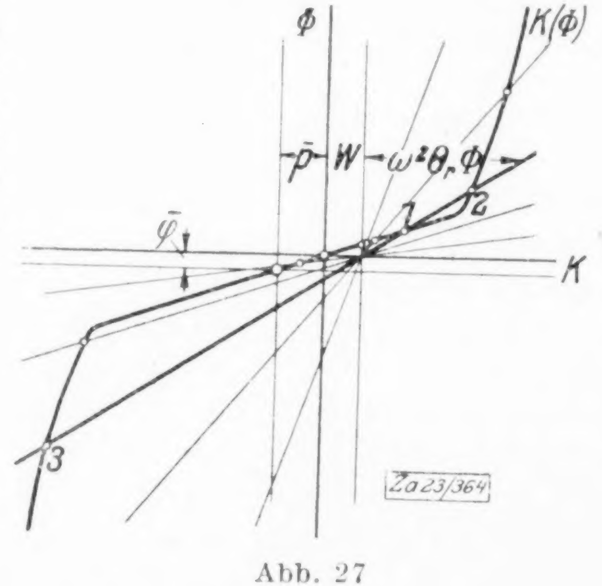


Abb. 27

Kraft q und dem Trägheitsmoment Θ_2 arbeitet. Das Gleichgewicht der äußeren Kräfte p und q mit den elastischen Kräften der Welle und den Trägheitskräften der Schwungmassen liefert die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{d t^2} + \left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right) k(\varphi) = \frac{p}{\Theta_1} - \frac{q}{\Theta_2} \quad \text{. . . . . . . (31).}$$

Die Kräfte p und q besitzen einen konstanten Anteil, der das nützliche Drehmoment liefert, durch das die Welle um einen bestimmten Winkel verdreht wird. Dieser Mittelwert der Drehmomente ist

$$\overline{k(\varphi)} = \overline{p} = -\overline{q} \quad \text{. . . . . (32),}$$

und wenn wir dieses von Gl. (31) abziehen, so bleiben nur noch periodische Schwankungen übrig, für deren Amplituden wir bei der vorherrschenden Frequenz ω näherungsweise die Beziehung erhalten

$$-\omega^2 \Phi + \left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2}\right) K(\Phi) = \frac{P}{\Theta_1} - \frac{Q}{\Theta_2} \quad \text{. . . . . . (33).}$$

Darin sind die Amplituden wieder sämtlich durch große Buchstaben dargestellt. Führen wir hier die resultierende Wechseldrehkraft und das resultierende Trägheitsmoment

$$W = \frac{\Theta_2 P - \Theta_1 Q}{\Theta_1 + \Theta_2}, \qquad \Theta_r = \frac{\Theta_1 \Theta_2}{\Theta_1 + \Theta_2} \quad \text{. . . . . . (34)}$$

ein, so erhalten wir als Amplitudengleichung

$$K(\Phi) = W + \omega^2 \Theta_r \Phi \quad \quad (35).$$

Diese Beziehung entspricht in ihrer Form vollständig der allgemeinen Gleichung (22).

Für mäßige Verdrehungen stählerner Wellen ist der Zusammenhang zwischen Drehkraft und Drehwinkel sehr genau proportional. Die Praxis zeigt jedoch, daß unter Umständen Wellenbrüche eintreten, vor deren Entstehen die Proportionalitätsgrenze zweifellos erheblich überschritten ist. In Abb. 27 ist daher die elastische Charakteristik $K(\Phi)$ der Welle im proportionalen und überproportionalen Bereiche dargestellt. Vom Nullpunkt dieser Charakteristik ab ist zunächst der Mittelwert $\bar{p}$ der Drehkraft abgetragen und liefert in Uebereinstimmung mit Gleichung (43) den mittleren Verdrehungswinkel $\bar{\varphi}$. Dieser Mittelwertspunkt gilt als Nullpunkt für die überlagerten Schwingungen und ist durch ein starkes Koordinatenkreuz in Abb. 27 hervorgehoben. Von dort aus sind die Amplituden der Schwingungskraft K und des Schwingungswinkels Φ zu zählen.

Um die stationären Schwingungsamplituden zu finden, ist nach Gl. (35) die Amplitude der Wechseldrehkraft W abzutragen, die für jede Anlage aus dem Maschinendiagramm bekannt ist, und außerdem die dem Drehwinkel Φ proportionale Trägheitskraft $\omega^2 \Theta_r \Phi$. Das liefert für verschiedene Frequenzen ω die schrägen Geraden der Abb. 27, von denen eine bestimmte stark hervorgehoben ist. Außer dem regulären Schnittpunkt 1 auf dem proportionalen Teil der elastischen Charakteristik treten auch noch Schnittpunkte 2 und 3 im nichtproportionalen Gebiete auf, von denen der erstere labilen, der letztere jedoch stabilen Betriebszuständen entspricht. Bereits der reguläre Schnittpunkt 1 im Proportionalitätsgebiet bewirkt nach Abb. 27 bei erheblicher Frequenz eine starke Steigerung der Wellenbeanspruchung. Durch eine zufällige Gleichgewichtsstörung, etwa durch Austauchen der Schraube oder durch einen Aussetzer im Dieselmotor oder irgendeinen sonstigen Kraftstoß, kann nun der reguläre Zustand 1 in den Zustand 3 umkippen. Dadurch wird die Welle plastisch beansprucht und kann in kürzester Zeit zu Bruch gehen.

Bemerkenswert ist, daß dieses Umkippen bereits unterhalb der Resonanzfrequenz eintritt, die man nach der elementaren Schwingungslehre für den proportionalen Teil der Wellencharakteristik berechnet, und die bestimmt ist durch diejenige Trägheitsgerade, die parallel diesem Teil läuft. Man sieht aus Abb. 27, daß das Umkippen in gefährliche Schwingungszustände nur unterhalb dieser Resonanzfrequenz eintreten kann, während oberhalb derselben nur ein einziger Schnittpunkt im proportionalen Bereich der Charakteristik vorhanden ist. Wenn die Welle erheblich außerhalb des Proportionalitätsgebietes arbeitet, so tritt eine plastische Verzerrung ein, die allerdings nunmehr verursacht, daß die Charakteristik wesentlich verändert wird. Die Welle kehrt bei jeder Schwingung nicht mehr in den gleichen Zustand zurück, sie durchläuft vielmehr beim Schwingen nach rechts und links verschiedene Aeste im Diagramm der Drehkräfte und Winkel. Es tritt dabei eine innere Reibung auf, die die Schwingungsamplituden in ähnlicher Weise begrenzt, wie es die Geschwindigkeitsdämpfung nach Abb. 20 bewirkt. Die durch Formänderung der Welle hervorgerufene Reibung führt jedoch stets nach einiger Zeit zum Bruch der Welle durch Ermüdung. Zur Vermeidung dieser gefährlichen Erscheinungen muß man nicht nur die Resonanzschwingung der elastischen Welle vermeiden, sondern auch einen erheblichen Bereich unterhalb der Resonanzlage.

Wir haben in Abb. 27 eine »weiche« Charakteristik betrachtet, bei der die Kraft oberhalb eines gewissen Wertes langsamer zunimmt wie der Weg. Andere Materialien können, besonders wenn sie auf Druck beansprucht werden, die entgegengesetzte Eigenschaft besitzen, nämlich eine schnellere Zunahme der Kraft wie des Weges. Bei solchen »harten« Charakteristiken ist das Arbeiten unterhalb der Resonanzlage ungefährlich, jedoch besteht für Frequenzen oberhalb der Resonanz für kleine Schwingungen die Möglichkeit des Umkippens in einen stabilen Schwingungszustand mit großen Ampsituden. An Hand der Elastizitätscharakteristik kann man durch die graphische Darstellung der Gl. (35) in jedem einzelnen Falle leicht untersuchen, ob durch eingeprägte periodische Kräfte Mehrdeutigkeit des Zustandes und gefährliche Größe der Schwingungen möglich sind oder nicht. 361

Über die Hencky-Prandtlschen Kurven.[1]

Von **C. CARATHÉODORY** in Athen und **ERHARD SCHMIDT** in Berlin.

Hencky[2]) und Prandtl[3]) haben die Aufmerksamkeit auf eine Klasse zweier zu einander orthogonaler ebener Kurvenscharen gelenkt, denen in der Mechanik der plastischen Körper eine wichtige Bedeutung zukommt.

Die Kurven lassen sich durch jede der beiden folgenden Eigenschaften definieren:

I. Die Tangenten an die Kurven der einen Schar in ihren Schnittpunkten mit je zwei festen Kurven der anderen haben einen konstanten Richtungsunterschied;

II. Der Krümmungsradius der Kurven der einen Schar in ihren Schnittpunkten mit einer beliebigen Kurve der anderen nimmt bei Durchlaufung der letzteren um die Länge des durchlaufenen Bogens ab. Dabei ist das Vorzeichen des Krümmungsradius dann als positiv festgesetzt, wenn der Krümmungsmittelpunkt in der Durchlaufungsrichtung liegt.

Von diesen beiden Eigenschaften I und II braucht nur das Bestehen der einen für die eine Schar vorausgesetzt zu werden. Es folgt dann daraus dieselbe Eigenschaft auch für die andere Schar und die andere Eigenschaft für beide Scharen.

Prandtl hat ein zeichnerisches Verfahren zur Konstruktion dieser Kurven angegeben und sie in einigen Fällen auch analytisch bestimmt.

Im Folgenden sollen alle diese Kurven durch Quadraturen bestimmt werden.

1. Die Differentialgleichungen des Kurvensystems. Es seien u und v die Parameter der Kurvenscharen. Die Richtung der wachsenden v sei zur Richtung der wachsenden u so orientiert, wie die y-Achse zur x-Achse. Ist dann ϑ der Richtungswinkel der Tangente an die Kurve $v =$ konst. in der Richtung des wachsenden u, so ist $\vartheta + \frac{\pi}{2}$ der Richtungswinkel der Tangente an die Kurve $u =$ konst. in der Richtung der wachsenden v. Man setze

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2, \quad U > 0, \quad V > 0 \quad \ldots \quad (1).$$

Damit ist

$$\frac{\partial x}{\partial u} = U \cos \vartheta \quad \ldots \quad (2), \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = - V \sin \vartheta \quad \ldots \quad (4),$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = U \sin \vartheta \quad \ldots \quad (3), \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = V \cos \vartheta \quad \ldots \quad (5).$$

Differenziiert man (2) nach v und (4) nach u und subtrahiert, so ergibt sich

$$\cos \vartheta \left[\frac{\partial U}{\partial v} + V \frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right] + \sin \vartheta \left[\frac{\partial V}{\partial u} - U \frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right] = 0 \quad \ldots \quad (6).$$

Ebenso folgt aus (3) und (5)

$$\sin \vartheta \left[\frac{\partial U}{\partial v} + V \frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right] - \cos \vartheta \left[\frac{\partial V}{\partial u} - U \frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right] = 0 \quad \ldots \quad (7).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial u} = - \frac{1}{V} \frac{\partial U}{\partial v} \quad \ldots \quad (8). \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = \frac{1}{U} \frac{\partial V}{\partial u} \quad \ldots \quad (9).$$

Man bezeichne mit R_u bezw. R_v den Krümmungsradius der Kurven $u =$ konst. bezw. $v =$ konst., wobei das positive Vorzeichen zu wählen ist, wenn der Krümmungsmittelpunkt in die Richtung der wachsenden u bezw. v fällt. Dann ist

$$\frac{1}{R_v} = \frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial u}}{\frac{ds}{du}} = \frac{1}{U} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} \quad . \quad (10) \qquad \frac{1}{R_u} = - \frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial v}}{\frac{ds}{dv}} = - \frac{1}{V} \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \quad . \quad (11),$$

wobei in der letzten Gleichung das negative Vorzeichen gilt, weil die Richtung der wachsenden v zur Richtung der wachsenden u entgegengesetzt orientiert ist wie die y-Achse zur x-Achse.

[1]) Da dieser Aufsatz unmittelbar an den Marburger Vortrag von Hrn. Prandtl anknüpft, ist er hier mit aufgenommen worden. Die Schriftleitung.

[2]) Diese Zeitschrift 3, 1923, S. 241—251.

[3]) In dem Vortrag auf der Marburger Versammlung, der in dem vorliegenden Heft, S. 401 bis 406 abgedruckt ist. Den Verfassern hat ein Fahnenabzug dieser Veröffentlichung vorgelegen.

Aus (11) folgt

$$\frac{\partial R_u}{\partial u} + \frac{ds}{du} = \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{V}{\frac{\partial \vartheta}{\partial v}}\right) + U = \frac{V}{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \, \partial v} - \frac{\frac{\partial V}{\partial u}}{\frac{\partial \vartheta}{\partial v}} + U.$$

Bei Berücksichtigung von (9) ergibt sich

$$\frac{\partial R_u}{\partial u} + \frac{ds}{du} = \frac{V}{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \, \partial v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Ebenso erhält man

$$\frac{\partial R_v}{\partial v} + \frac{ds}{dv} = -\frac{U}{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \, \partial v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Die bisher entwickelten, natürlich bekannten Gleichungen gelten für alle Scharen orthogonaler Kurven.

Man betrachte nun die Gleichungen

$$\frac{\partial R_u}{\partial u} + \frac{ds}{du} = 0 \quad . \; . \quad (14), \qquad \frac{\partial R_v}{\partial v} + \frac{ds}{dv} = 0 \quad \ldots \quad (15), \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \, \partial v} = 0 \quad \ldots \quad (16)$$

und die aus (16) durch Integration folgende Gleichung

$$\vartheta = g(v) - f(u) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17),$$

wobei g und f willkürliche Funktionen bedeuten.

Bei Berücksichtigung von (12) und (13) ergibt sich unmittelbar, daß aus jeder dieser vier Gleichungen die drei übrigen folgen. Die Gl. (17) ist der analytische Ausdruck für die Eigenschaft I und zeigt, daß das Erfülltsein dieser Eigenschaft für die eine Kurvenschar ihr Bestehen auch für die andere nach sich zieht. Die Gleichungen (14) und (15) sind der analytische Ausdruck der Eigenschaft II für jede der beiden Kurvenscharen.

2. Bestimmung des Kurvensystems, wenn von jeder Schar eine Kurve vorgeschrieben ist. Es sei ein Hencky-Prandtlsches Kurvensystem zu bestimmen, das zwei vorgegebene, einander im Punkte O rechtwinklig schneidende Kurven enthält. Die Koordinaten der einen Kurve seien als Funktionen eines Parameters u gegeben, die der anderen als Funktionen eines Parameters v. Man wähle diese Parameter als Parameter der Kurvenscharen dergestalt, daß die gegebenen Kurven die Kurven $v = 0$ und $u = 0$ sind. Man kann annehmen, daß die Richtungen der x-Achse und der y-Achse mit den Richtungen der wachsenden u und der wachsenden v im Punkte O übereinstimmen. Dann ist, wenn in der Gl. (17)

$$f(o) = g(o) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

gesetzt wird, $f(u)$ gleich dem negativ genommenen Richtungswinkel der gegebenen Kurve $v = 0$, $g(v)$ gleich dem um $\frac{\pi}{2}$ verminderten Richtungswinkel der gegebenen Kurve $u = 0$. Die Funktionen $f(u)$ und $g(v)$ können also als gegeben betrachtet werden. Ebenso sind die Funktionen $U(u,o)$, $V(o,v)$ durch die Gleichungen

$$U(u,o) = \left(\frac{ds}{du}\right)_{v=0}, \qquad V(o,v) = \left(\frac{ds}{dv}\right)_{u=0} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

gegeben. Die Gleichungen (8), (9), (10), (11) lauten jetzt

$$\frac{\partial U}{\partial v} = f'(u)\, V \quad \ldots \quad (20), \qquad \frac{\partial V}{\partial u} = g'(v)\, U \quad \ldots \quad (21).$$

$$R_v f'(u) = -U \quad . \; . \quad (22), \qquad R_u g'(v) = -V \quad \ldots \quad (23).$$

Unter Anwendung der Riemannschen Integrationsmethode führe man nun die Besselsche Funktion $J(z)$ ein durch die Definitionsgleichung

$$J(z) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{z^\nu}{(\nu!)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24).$$

Dann ist zunächst

$$J(o) = 1 \quad \ldots \quad (25), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} J(xy) = J(xy) \quad . \quad (26).$$

Man setze ferner

$$\alpha = f(u), \quad \alpha_1 = f(u_1), \quad \beta = g(v), \quad \beta_1 = g(v_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Dann ergibt sich aus (20), (21), (26), daß

$$U \frac{\partial}{\partial \alpha} J\{(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1)\}\, du + V J\{(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1)\}\, dv$$

ein vollständiges Differential ist. Das Integral dieses Differential um das Rechteck mit den vier Ecken o,o; u_1,o; u_1,v_1; o,v_1 ist daher gleich Null. Nun wird für $v = v_1$ wegen (27) $\beta = \beta_1$ und mithin

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J\{(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1)\} = (\beta - \beta_1) J'\{(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1)\} = 0.$$

Ferner ist für $u = u_1$ wegen (27) $\alpha = \alpha_1$ und mithin wegen (25)

$$J\{(\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1)\} = J(o) = 1.$$

Die Integration um das Rechteck ergibt daher bei Berücksichtigung des aus (18) folgenden Verschwindens von α mit u und von β mit v:

$$o = \int_0^{v_1} V(u_1,v)\, dv - \int_0^{v_1} J\{\alpha_1(\beta_1 - \beta)\}\, V(o,v)\, dv + \int_0^{u_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} J\{\beta_1(\alpha_1 - \alpha)\}\, U(u,o)\, du.$$

Ersetzt man im letzten Integranden die Differentiation nach α durch Differentiation nach α_1, wobei sich das Vorzeichen umkehrt, multipliziert die ganze Gleichung mit $f'(u_1)$ und führt das erste Integral auf Grund der Gleichung (20) aus, so ergibt sich

$$U(u_1,v_1) = U(u_1,o) + f'(u_1)\int_0^{u_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} J\{\beta_1(\alpha_1 - \alpha)\}\, U(u,o)\, du$$

$$+ f'(u_1)\int_0^{v_1} J\{\alpha_1(\beta_1 - \beta)\}\, V(o,v)\, dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Ebenso ergibt sich

$$V(u_1,v_1) = V(o,v_1) + g'(v_1)\int_0^{v_1} \frac{\partial}{\partial \beta_1} J\{\alpha_1(\beta_1 - \beta)\}\, V(o,v)\, dv$$

$$+ g'(v_1)\int_0^{u_1} J\{\beta_1(\alpha_1 - \alpha)\}\, U(u,o)\, du \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Umgekehrt ist bei Berücksichtigung der Gleichungen (25) (26) leicht zu verifizieren, daß die durch die Formeln (28) (29) dargestellten Funktionen $U(u_1,v_1)$, $V(u_1,v_1)$ als Funktionen von u_1 und v_1 den Differentialgleichungen (20) (21) genügen und für $v_1 = 0$ resp. $u_1 = 0$ in die gegebenen Funktionen $U(u_1,o)$, $V(o,v_1)$ übergehen. Die Herleitung der Formeln (28) (29) zeigt gleichzeitig, daß es die einzigen Lösungen der Differentialgleichungen (20) (21) unter diesen Grenzbedingungen sind.

Wählt man nun, um die Formeln zu vereinfachen, als Parameter u und v die vom Punkte O aus gemessenen Bogenlängen der gegebenen Kurveu $v = o$ und $u = o$, so wird

$$U(u, o) = 1, \qquad V(o, v) = 1.$$

Man erhält daher

$$U(u_1, v_1) = 1 + f'(u_1)\int_0^{u_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} J\{\beta_1(\alpha_1 - \alpha)\}\, du + f'(u_1)\int_0^{v_1} J\{\alpha_1(\beta_1 - \beta)\}\, dv \quad (30).$$

$$V(u_1, v_1) = 1 + g'(v_1)\int_0^{v_1} \frac{\partial}{\partial \beta_1} J\{\alpha_1(\beta_1 - \beta)\}\, dv + g'(v_1)\int_0^{u_1} J\{\beta_1(\alpha_1 - \alpha)\}\, du \quad (31).$$

Die Gleichungen (20) (21) sind unter Voraussetzung der Gleichung (17) gleichbedeutend mit den Gleichungen (8) und (9) und mithin auch mit den Gleichungen (6) und (7). Letztere sind die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungspaare (2) (4) und

(3) (5). Führt man in diese die durch die Gleichungen (30) (31) erhaltenen Werte von U und V ein und führt die Integration aus, so ergibt sich, wenn der Schnittpunkt O der gegebenen Kurven $u = o$ und $v = o$ als Koordinatenanfangspunkt gewählt wird:

$$x(u_1, v_1) = x(u_1, o) + x(o, v_1) - \int_0^{u_1} du \int_0^{\beta_1} J\{(\alpha_1 - \alpha) t\} \sin(t - \alpha_1)\, dt$$
$$+ \int_0^{v_1} dv \int_0^{\alpha_1} J\{(\beta_1 - \beta) t\} \cos(t - \beta_1)\, dt \quad (32).$$

$$y(u_1, v_1) = y(u_1, o) + y(o, v_1) - \int_0^{v_1} dv \int_0^{\alpha_1} J\{(\beta_1 - \beta) t\} \sin(t - \beta_1)\, dt$$
$$+ \int_0^{u_1} du \int_0^{\beta_1} J\{(\alpha_1 - \alpha) t\} \cos(t - \alpha_1)\, dt \quad (33).$$

Die Verifikation ist leicht durchzuführen. Es gelten nämlich zunächst die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial x(u_1, o)}{\partial u_1} = \cos(-\alpha_1) & \frac{\partial x(o, v_1)}{\partial v_1} = -\sin \beta_1 \\ \frac{\partial y(u_1, o)}{\partial u_1} = \sin(-\alpha_1) & \frac{\partial y(o, v_1)}{\partial v_1} = \cos \beta_1 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (34).$$

Ferner folgen aus (26) die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}[-J\{(\alpha_1 - \alpha) t\} \sin(t - \alpha_1)] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}\{(\alpha_1 - \alpha) t\} \cos(t - \alpha_1)\right] \quad \ldots \quad (35).$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1}[-J\{(\beta_1 - \beta) t\} \sin(t - \beta_1)] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial J}{\partial \beta_1}\{(\beta_1 - \beta) t\} \cos(t - \beta_1)\right] \quad \ldots \quad (36).$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}[J\{(\alpha_1 - \alpha) t\} \cos(t - \alpha_1)] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}\{(\alpha_1 - \alpha) t\} \sin(t - \alpha_1)\right] \quad \ldots \quad (37).$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1}[J\{(\beta_1 - \beta) t\} \cos(t - \beta_1)] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial J}{\partial \beta_1}\{(\beta_1 - \beta) t\} \sin(t - \beta_1)\right] \quad \ldots \quad (38).$$

Man erhält bei Berücksichtigung von (34) und (25)

$$\frac{\partial x(u_1, v_1)}{\partial u_1} = \cos \alpha_1 - \int_0^{\beta_1} \sin(t - \alpha_1)\, dt + \frac{d\alpha_1}{du_1} \int_0^{u_1} du \int_0^{\beta_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}[-J\{(\alpha_1 - \alpha) t\} \sin(t - \alpha_1)]\, dt$$
$$+ \frac{d\alpha_1}{du_1} \int_0^{v_1} dv\, J\{(\beta_1 - \beta)\, \alpha_1\} \cos(\beta_1 - \alpha_1)\, dv.$$

Aus dieser Gleichung folgt wegen (35)

$$\frac{\partial x(u_1, v_1)}{\partial u_1} = U(u_1, v_1) \cos(\beta_1 - \alpha_1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (39),$$

wo $U(u_1, v_1)$ durch (30) definiert ist.

Ebenso ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\partial y(u_1, v_1)}{\partial u_1} = U(u_1, v_1) \sin(\beta_1 - \alpha_1) \quad (40) \qquad \frac{\partial x(u_1, v_1)}{\partial v_1} = -V(u, v_1) \sin(\beta_1 - \alpha_1) \quad (41)$$

$$\frac{\partial y(u_1, v_1)}{\partial v_1} = V(u_1, v_1) \cos(\beta_1 - \alpha_1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (42),$$

wobei $V(u_1, v_1)$ durch (31) definiert ist.

Die letzten Gleichungen zeigen, daß das durch die Formeln (32) (33) dargestellte Kurvensystem in der Tat ein Hencky-Prandtlsches ist, während die Formeln (32) (33) unmittelbar ablesen lassen, daß die Kurven $u_1 = o$, $v_1 = o$ die vorgeschriebenen sind.

Sind die Koordinaten der beiden gegebenen Kurven zweimal stetig differenziierbare Funktionen der Bogenlänge, so kann das System, wie die Darstellung (32) (33) lehrt, nur an solchen Stellen Singularitäten — im allgemeinen Spitzen — aufweisen, wo eine

der durch die Gleichungen (30) (31) gegebenen Funktionen $U(u_1, v_1)$, $V(u_1, v_1)$ verschwindet. Da wegen (30) (31) U resp. V nicht gleichzeitig mit $f'(u_1)$ resp. $g'(v_1)$ verschwinden kann, so verschwindet wegen (22) (23) U resp. V dann und nur dann, wenn R_v resp. R_u verschwindet. Daß solche Singularitäten in der Tat auftreten müssen, folgt unmittelbar aus der Definitionseigenschaft II der Hencky-Prandtlschen Kurven.

Die praktische Ausrechnung betreffend ist noch hervorzuheben, daß die Reihe (24) für die Besselsche Funktion J, da als Argumente nur Produkte der Richtungsunterschiede der gegebenen Kurven in verschiedenen Punkten auftreten, im allgemeinen außerordentlich rasch konvergiert.

Ist die Kurve $u = o$ eine Gerade, so ist $g(v)$ konstant und zwar wegen (18) gleich Null. Also ist wegen (27) (25)

$$\beta = o, \ \beta_1 = o, \ J\{(\beta_1 - \beta)t\} = 1.$$

Endlich ist wegen (34)

$$x(o, v_1) = o, \ y(o, v_1) = v_1.$$

Durch Einführung dieser Gleichungen in die Formeln (32) (33) erhält man

$$x(u_1, v_1) = x(u_1, o) + v_1 \sin \alpha_1, \quad y(u_1, v_1) = y(u_1, o) + v_1 \cos \alpha_1.$$

Das sind die Gleichungen des Orthogonalsystems, das aus den Normalen der Kurve $v = o$ und ihren Aequidistantialkurven besteht.

Reduziert sich die Kurve $u = o$ auf einen Punkt, d. h. sollen alle Kurven der Schar $v =$ konst. durch den Koordinatenanfangspunkt O gehen, so ist

$$V(o, v) \equiv o$$

zu setzen. Man erhält, wenn als Parameter u wieder die vom Punkte O aus gemessene Bogenlänge der Kurve $v = o$ gewählt wird, so daß

$$U(u, o) = 1$$

zu setzen ist, aus den Gleichungen (28) (29) durch Einführung in die Gleichungen (2) (3) (4) (5) und Integration

$$x(u_1, v_1) = x(u_1, o) - \int_0^{u_1} du \int_0^{\beta_1} J\{(\alpha_1 - \alpha)t\} \sin(t - \alpha_1)\, dt$$

$$y(u_1, v_1) = y(u_1, o) + \int_0^{u_1} du \int_0^{\beta_1} J\{(\alpha_1 - \alpha)t\} \cos(t - \alpha_1)\, dt.$$

Man sieht aus diesen Formeln, daß x und y von v_1 nur als Funktionen von β_1 abhängen. Man kann daher β_1 statt v_1 als Parameter einführen und erhält

$$x(u_1, \beta_1) = x(u_1, o) - \int_0^{u_1} du \int_0^{\beta_1} J\{(\alpha_1 - \alpha)t\} \sin(t - \alpha_1)\, dt$$

$$y(u_1, \beta_1) = y(u_1, o) + \int_0^{u_1} du \int_0^{\beta_1} J\{(\alpha_1 - \alpha)t\} \cos(t - \alpha_1)\, dt.$$

Durch diese Formeln ist die gestellte Aufgabe gelöst. Denn die Funktion $\alpha = f(u)$ ist als negativ genommener Richtungswinkel der gegebenen Kurve $v = o$ bekannt, während die durch die Grenzbedingungen nicht gegebene Funktion $g(v)$ in der letzten Darstellung nicht vorkommt.

3. Vereinfachung der Differentialgleichungen. Man betrachte nun ein Gebiet, in welchem

$$f'(u) \neq o, \quad g'(v) \neq o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

sind. Das ist wegen (22) (23) gleichbedeutend mit der Annahme, daß die Krümmung der Kurven beider Scharen im Gebiete überall von Null verschieden ist. Dann kann man annehmen, daß die Richtung des wachsenden Parameters in jeder Kurve von der konkaven in die konvexe Seite der Orthogonalen weist. Das bedeutet gemäß der bei der Definition der Krümmungsradien getroffenen Vorzeichenbestimmung, daß beide Krümmungsradien negativ sind. Wegen (22) (23) ist daher

$$f'(u) > o, \quad g'(v) > o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Man wähle jetzt

$$\alpha = f(u), \quad \beta = g(v)$$

als Parameter. Dann stimmt wegen (44) die Richtung der wachsenden α resp. β mit der Richtung der wachsenden u resp. v überein. Es bleibt daher

$$\vartheta = \beta - \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (45).$$

Bezeichnen A und B die Werte von U und V bei den neuen Parametern, so nehmen die Gleichungen (20) (21) (22) (23) die Gestalt an

$$R_\beta = -A, \quad R_\alpha = -B \quad (46), \qquad \frac{\partial A}{\partial \beta} = B, \quad \frac{\partial B}{\partial \alpha} = A \quad \ldots \quad (47).$$

Die Gleichungen (47) sind gleichbedeutend mit dem Gleichungspaar

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \, \partial \beta} = A \quad (48), \qquad \frac{\partial A}{\partial \beta} = B \quad \ldots \ldots \quad (49).$$

Die Gleichungen (2) (3) (4) (5) nehmen die Gestalt an

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= A \cos(\beta - \alpha) & \frac{\partial x}{\partial \beta} &= -B \sin(\beta - \alpha) \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} &= A \sin(\beta - \alpha) & \frac{\partial y}{\partial \beta} &= B \cos(\beta - \alpha) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (50).$$

Da die Integrabilitätsbedingungen der Gl. (50) durch die Gl. (48) (49) gesichert sind, so sehen wir, daß bei der gemachten Beschränkung auf Gebiete, in welchen die Krümmungen nirgends verschwinden, jeder Lösung der Gl. (48) mit positiven A und $\frac{\partial A}{\partial \beta}$ ein Hencky-Prandtlsches Kurvensystem entspricht und umgekehrt.

4. Spezielle Lösungen. Wählen wir als erstes Beispiel

$$A = a\, J(\alpha \beta) + b \frac{\partial J}{\partial \alpha}(\alpha \beta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (51),$$

wo a und b Konstanten bedeuten. Man erhält gemäß (49) und (26)

$$B = a \frac{\partial J}{\partial \beta}(\alpha \beta) + b\, J(\alpha \beta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (52).$$

Durch Einführung dieser Formeln in (50) und Integration ergibt sich

$$x = a \int_0^\alpha J(\beta t) \cos(t - \beta)\, dt - b \int_0^\beta J(\alpha t) \sin(t - \alpha)\, dt \quad \ldots \quad (53),$$

$$y = -a \int_0^\alpha J(\beta t) \sin(t - \beta)\, dt + b \int_0^\beta J(\alpha t) \cos(t - \alpha)\, dt \quad \ldots \quad (54).$$

Die Verifikation dieser Formeln ist bei Berücksichtigung der Gl. (35) (36) (37) (38) leicht. Die Kurve $\alpha = 0$ ist hier ein Kreis mit dem Radius b, die Kurve $\beta = 0$ ein Kreis mit dem Radius a. Die Gl. (53) (54) stellen daher das Hencky-Prandtlsche Kurvensystem dar, welches welches zwei sich rechtwinkelig schneidende Kreise mit den Radien a und b enthält.

Setzt man in Gl. (53) (54) $b = 0$, so erhält man ein Hencky-Prandtlsches Kurvensystem, dessen eine Schar einen Kreis mit dem Radius a enthält und mit sämtlichen Kurven durch einen Punkt dieses Kreises geht.

Um zu weiteren Beispielen zu gelangen, machen wir den Ansatz

$$A = f(p\,\alpha + q\,\beta),$$

wobei p und q Konstanten bedeuten.

Man erhält aus der Differentialgleichung (48):

$$\text{I} \quad A = C\sqrt{1 + c^2}\, e^{c\alpha + \frac{1}{c}\beta}, \quad B = C \frac{\sqrt{1 + c^2}}{c}\, e^{c\alpha + \frac{1}{c}\beta} \quad \ldots \quad (55),$$

wo C und c Konstanten bedeuten und C positiv ist:

$$\text{II} \quad A = 2\,C \cos\left(k\alpha - \frac{1}{k}\beta\right), \quad B = \frac{2\,C}{k} \sin\left(k\alpha - \frac{1}{k}\beta\right) \quad \ldots \quad (56),$$

wobei C und k positive Konstanten bedeuten.

Die Einführung der Lösung I in (50) ergibt

$$x = C\,e^{c\alpha + \frac{1}{c}\beta}\cos(\beta - \alpha + \gamma), \quad y = C\,e^{c\alpha + \frac{1}{c}\beta}\sin(\beta - \alpha + \gamma) \quad . \quad . \quad (57),$$

wobei $\operatorname{cotg}\gamma = c$, $\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$ zu setzen ist. Führt man Polarkoordinaten und neue Parameter ein durch die Gleichungen $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ sowie

$$\alpha = \alpha' - \frac{c\log C - \gamma}{1+c^2}, \qquad \beta = \beta' - \frac{c\log C + c^2\gamma}{1+c^2},$$

so ergibt sich

$$r = C\,e^{c\alpha' + \frac{1}{c}\beta'}, \qquad \varphi = \beta' - \alpha', \qquad \vartheta = \varphi - \gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58).$$

Es handelt sich hier also um zwei Scharen entgegengesetzt gewundener logarithmischer Spiralen. Die einen schneiden die Radienvektoren vom Anfangspunkt unter dem Winkel γ, die anderen unter $\pi/2 - \gamma$. Mit Ausnahme des Anfangspunktes geht durch jeden Punkt eine und nur eine Spirale jeder Schar. Dabei entsprechen jeder Spirale unendlich viel Werte von α' bezw. β', die sich um ganze Vielfache von $2\pi/(1+c^2)$ bezw. von $2\pi c^2/(1+c^2)$ unterscheiden. Diese Lösung ist schon von Prandtl l. c. angegeben worden.

Durch Einführung der Lösung II (56) in (50) erhält man für $k \neq 1$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{C}{k-1}\sin\left\{(k-1)\,\alpha + \frac{k-1}{k}\beta\right\} + \frac{C}{k+1}\sin\left\{(k+1)\,\alpha - \frac{k+1}{k}\beta\right\} \\ y &= -\frac{C}{k-1}\cos\left\{(k-1)\,\alpha + \frac{k-1}{k}\beta\right\} + \frac{C}{k+1}\cos\left\{(k+1)\,\alpha - \frac{k+1}{k}\beta\right\} \end{aligned}\right\} \quad (59).$$

Für $k = 1$ ergibt sich

$$x = C(\alpha + \beta) - \frac{C}{2}\sin 2(\beta - \alpha), \quad y = \frac{C}{2}\cos 2(\beta - \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad (60).$$

Die Gl. (60) stellen zwei Scharen von Cycloiden dar. Diese Lösung ist ebenfalls schon von Herrn Prandtl l. c. angegeben worden [1]).

5. Hencky-Prandtlsche Kurvensysteme, welche eine konforme Abbildung vermitteln. Setzt man in den Gl. (58)

$$\alpha' = \alpha''\sin\gamma, \quad \beta' = \beta''\cos\gamma, \quad q = e^{-i\gamma}, \quad z = r\,e^{i\varphi}, \quad w = \alpha'' + i\,\beta'',$$

so lassen sich die Gl. (57) in folgender Form schreiben:

$$z = e^{qw} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61),$$

wo q eine komplexe Konstante vom absoluten Betrag 1 bedeutet.

Die Gl. (61) ist umfassender als die Gl. (58), da sie für $q = \pm 1$ oder $q = \pm i$ auch den ausgearteten Fall zur Darstellung bringt, daß die eine Schar der logarithmischen Spiralen in eine Schar konzentrischer Kreise und die andere in die Schar der vom gemeinsamen Mittelpunkt ausgehenden Halbstrahlen übergeht.

Die Konformität der durch das Hencky-Prandtlsche Kurvensystem (61) gegebenen Abbildung legt die Frage nahe, alle Hencky-Prandtlschen Kurvensysteme zu bestimmen, welche bei geeigneter Parameterwahl eine konforme Abbildung vermitteln.

Sind u und v die Parameter, welche x und y konform entsprechen, so ist $U = V$. Die Gl. (20) (21) ergeben

$$\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial v} = f'(u), \qquad \frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial u} = g'(v) \qquad \text{und hieraus} \quad f''(u) = g''(v) = 2\,l,$$

wo l eine reelle Konstante bedeutet. Die Annahme $l = 0$ führt zu den durch die Gl. (61) gegebenen Kurvensystemen. Es sei also $l \neq 0$. Dann ist

$$f'(u) = 2\,l\,u + c_1, \quad g'(v) = 2\,l\,v + c_2.$$

Durch die Transformation $u' = u + \frac{c_1}{2\,l}$, $v' = v + \frac{c_2}{2\,l}$, bei welcher die entsprechenden Funktionen U und V ungeändert bleiben, kann man c_1 und c_2 zum Verschwinden bringen. Wir können also, indem wir statt u', v' wieder u und v schreiben, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß c_1 und c_2 verschwinden. Man erhält

$$U = V = C\,e^{2luv},$$

wo C eine reelle Konstante bedeutet, ferner

$$\vartheta = g(v) - f(u) = l\,(v^2 - u^2) + c_3,$$

[1]) Hr. Feigl hat die Verfasser darauf aufmerksam gemacht, daß die eine Schar aus Epi-, die andere aus Hypocykloiden besteht. Für $k < 1$ haben die Rollkreise den Radius $a = C/(1 + k)$, die festen Kreise (mit dem Zentrum im Koordinatenanfang) die Radien $b - a$ bezw. $b + a$, wobei $b = C/(1 - k)$.

wo c_3 eine reelle Konstante bedeutet. Durch Wahl der x-Achsenrichtung kann man die Konstante c_3 zum Verschwinden bringen. Wir können also annehmen

$$\vartheta = l\,(v^2 - u^2).$$

Durch Einführung dieser Formeln in die Gl. (2) (3) (4) (5) ergibt sich

$$\frac{dz}{dw} = C\,e^{-l\,i\,w^2}, \qquad z = x + i\,y, \qquad w = u + i\,v.$$

Setzt man $u' = \sqrt{l}\,u,\ v' = \sqrt{l}\,v,\ w' = \sqrt{l}\,w,\ C = \frac{1}{\sqrt{l}}\,C$, so ist $w' = u' + i\,v'$ und es wird

$$\frac{dz}{d\,w'} = C'\,e^{\pm i\,w'^2}, \quad z = C'\int_0^{w'} e^{\pm i\,t^2}\,dt, \quad C' \text{ reell} \quad \ldots\ldots \quad (62).$$

Das durch die letzte Gleichung dargestellte Kurvensystem mit den Parametern $u'\,v'$, die durch die Gl. (61) dargestellten Kurvensysteme mit den Parametern $u\,v$ und der triviale Fall zweier Scharen zu einander rechtwinkliger Geraden bilden also alle Hencky-Prandtlschen Kurvensysteme, welche bei geeigneter Wahl der Parameter eine konforme Abbildung vermitteln. 370

KLEINE MITTEILUNGEN

Die mathematischen Grundlagen der Währungstheorie. 1. Die Quantitätstheorie. Eine Entscheidung über Wert oder Unwert der verschiedenen nationalökonomischen Geldtheorien soll hier nicht getroffen werden, es soll vielmehr lediglich diejenige Grundthese der sogenannten veredelten Quantitätstheorie benutzt werden, die auch von anderen Theorien als richtig anerkannt wird. Es handelt sich um die Behauptung, daß die gesamte Geldmenge gleich der gesamten Gütermenge ist. Dabei soll unter der Geldmenge die Menge des angebotenen Geldes verstanden werden und unter der Gütermenge die Menge der angebotenen Waren. Ferner soll die Umlaufsgeschwindigkeit des Geldes als konstant und zwar = 1 angenommen werden, so daß ein einmaliger Besitzwechsel der gesamten Geldmenge ausreicht, um die zur Verfügung stehende Gütermenge umzusetzen. Ist dann m die Menge Geldes (etwa in Mark), g die Gütermenge (etwa in Kilogramm) und k die Kaufeinheit, d. h. die Menge Mark, die für ein Kilogramm zu zahlen ist, so gilt die Gleichung

$$m = g\,.\,k \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

$\frac{1}{k}$ ist dann die Kaufkraft des Geldes, d. h. die Menge kg, die für 1 ℳ zu kaufen ist.

Aus dieser Gleichung folgt, daß bei konstanter Gütermenge die Kaufkraft der Geldmenge umgekehrt proportional ist und bei konstanter Geldmenge die Kaufkraft der Produktion direkt proportional ist. Dabei soll die Bevölkerungszahl als konstant angesehen werden.

2. Die unstetige Inflation. Nehmen wir die Gütermenge g als konstant an, und sei zu einer gewissen Zeit t_0 die Geldmenge m_0 vorhanden, die um p vermehrt wird, so gelten die beiden Gleichungen:

$$m_0 = g\,.\,k_0 \quad \text{und} \quad m_1 = m_0 + p = g\,.\,k_1,$$

aus denen sich

$$\frac{m_0 + p}{m_0} = \frac{k_1}{k_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ergibt. Setzen wir $k_0 = 1$, so wird:

$$k_1 = 1 + \frac{p}{m_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Sobald also bei der Vermehrung von m_0 um p erklärt wird, daß an Stelle von a Mark $a\,(1 + \frac{p}{m_0})$ Mark bezahlt werden müssen, ist der Ausgleich wiederhergestellt. Es würde also bei jeder Inflation eine bestimmte neue Währungseinheit geschaffen werden müssen. Irving Fisher[1]) hat das umgekehrte Problem behandelt, bei dem infolge von Produktionsänderungen Schwankungen des Geldwerts eintreten und nun durch Aenderung des Gewichts der Münzen oder durch Aenderung der auf ihnen verzeichneten Einheiten das Gleichgewicht wiederhergestellt wird. Bei einer Inflation handelt es sich vornehmlich um den Fall, daß der Staat p Einheiten mehr für seine Zwecke gebraucht. Es folgt aber aus der obigen Gleichung sofort, daß die p Einheiten infolge der Aenderung der Kaufkraft in Wirklichkeit nur $p - p \cdot \frac{p}{m_0}$ wert sind. Die Empfänger der p müßten also $p \cdot \frac{p}{m_0}$ mehr erhalten. Dadurch würde wieder die Inflation vermehrt werden. Der Ausgleich wird aber erreicht, wenn die Empfänger der p erhalten:

$$p\,(1 + \frac{p}{m_0} + \frac{p^2}{m_0^2} + \ldots\ldots\ldots) = p \cdot \frac{m_0}{m_0 - p}$$

d. h. k_1 wäre $= \frac{m_0}{m_0 - p} \quad \ldots\ldots \quad (4)$

zu setzen.

[1]) Die Kaufkraft des Geldes, Berlin 1916.

3. Die stetige Inflation. Daß die obige Ueberlegung zu einer stetigen Inflation und einer ihr angepaßten gleitenden Währung führt, geht aus folgendem hervor[1]). Werden an die Empfänger der p gleich diejenigen Zuschläge mit ausbezahlt, die infolge der sinkenden Kaufkraft der p nötig sind, um tatsächlich p Gütereinheiten zu erwerben, so erhalte ich folgende Gleichung:

$$m_0 + p \cdot k_1 = g \cdot k_1,$$

oder nach Gleichung (1):

$$m_0 + p \cdot k_1 = \frac{m_0}{k_0} \cdot k_1\,,$$

aus der folgt:

$$k_1 = \frac{m_0}{m_0 - p}\,,$$

wenn $k_0 = 1$ gesetzt wird.

Wird diese Inflation stetig durchgeführt, so ergibt sich die Gleichung:

$$m_0 + p \cdot k_1 \cdot d\,t = m_0 + m_0 \cdot d\,k_1.$$

Daraus folgt:

$$\frac{d\,k_1}{k_1} = \frac{m}{p} \cdot dt.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$k_1 = e^{\frac{p}{m} \cdot t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

wenn wieder $k_0 = 1$ gesetzt wird.

4. Prüfung der Theorie an der Erfahrung. Um die Formel (5) an der Erfahrung zu prüfen, wurden nach den vom Statistischen Reichsamt in der Zeitschrift »Wirtschaft und Statistik« veröffentlichten Zahlen die Lebenshaltungsindexzahlen (k) mit den im Umlauf befindlichen Papiermarksummen (m) verglichen. Dabei sind die Zahlen für die Monate Juli 1922 bis Februar 1923 genommen, die Papiergeldsummen sind in Milliarden Mark angegeben. Wie schlecht das tatsächliche Verhältnis $\frac{m}{k}$ mit der aus Formel (1) sich ergebenden Konstanz übereinstimmt, geht aus der dritten Kolonne hervor. Es sind ferner für die aufeinander folgenden Monate die Summen $m' = m \cdot e^{\frac{p}{m}}$ errechnet, die sich bei einer geregelten Inflation ergeben hätten. Die Werte sind in der vierten Kolonne (m') hingeschrieben. Daß sich dann eine bedeutend bessere Uebereinstimmung ergibt, zeigen die unter die Kolonnen 3 und 5 geschriebenen durchschnittlichen Abweichungen vom Mittel.

Es zeigt sich also, daß die Kaufkraft des Geldes sich von selbst der durch die Theorie geforderten Kurve anpaßt. Wäre die Inflation nach der Formel (5) vorgenommen worden, so wäre jede Ungerechtigkeit für die Empfänger der p vermieden worden, und die Kaufeinheit hätte von vornherein in gleitender Weise fixiert werden können.

Dadurch, daß die m nicht wie die m' angegeben, vermehrt worden sind, ist eine Vermehrung der schwebenden Schuld des Reiches

[1]) Vergl. W. Harburger, Gleitende Währung, München 1923.

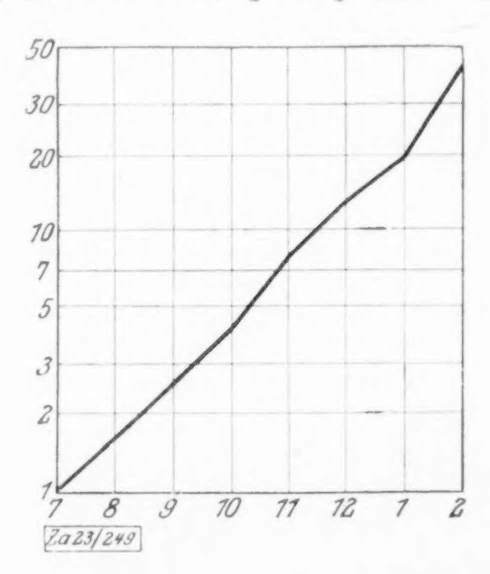
1	2	3	4	5
k	m	m/k	m'	m'/k
54	203	3,8	—	—
78	252	3,2	258	3,3
133	331	2,5	352	2,7
221	485	2,2	557	2,5
446	770	1,7	1016	2,3
685	1295	1,9	2045	2,9
1120	2000	1,8	3726	3,3
2643	3536	1,4	7504	2,8
		0,6		0,3

nötig geworden, die sich für die betreffenden Monate in Milliarden Mark durch folgende Zahlen ausdrückt: 329, 356, 528, 720, 1166, 2093, 2781, 4628.

5. Die logarithmische Steigerung. Aus Formel (5) folgt die Gleichung:

$$\ln k = \frac{p}{m} \cdot t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Die tatsächliche Kurve der obigen k-Werte ist im logarithmischen Koordinatensystem in der folgenden Abbildung dargestellt. Man sieht



sofort, wie auffallend gering die Abweichung von der geraden Linie ist. Die Gestalt dieser Geldentwertungskurve ist bereits in den Heften 4 von Bd. 2 und 2 von Bd. 3 dieser Zeitschrift von v. Mises und Fillunger an der Entwicklung des Dollarkurses dargestellt, und sie ist hier in Abhängigkeit von der Inflation gebracht, die im Mittel der betrachteten Monate für $\frac{p}{m}$ etwa den Wert $^1/_2$ ergibt. Da in der Abbildung der Zeiteinheit für einen Monat ein 4,5tel von log 10 beträgt, so würde Gleichung (6) die Gerade

$$y = {}^1/_2 \cdot 0{,}43 \cdot 4{,}5\,x$$

oder ungefähr $\quad y = x$

liefern. Die weitgehende Annäherung an diese Gerade ist aus der Abbildung zu ersehen. Selbstverständlich ist damit nur die Abhängigkeit von Geldentwertung und Inflation quantitativ geklärt, nichts aber über den ursächlichen Zusammenhang ausgesagt. 306

Hamburg. P. Riebesell.

BUCHBESPRECHUNGEN

JULIUS **PIA,** Untersuchungen über die Tektonik der Lessinischen Alpen und über die Verwendung statistischer Methoden in der Tektonik. 1. Teil. Mit 61 Abb. im Text und 5 Tafeln. Denkschriften des Naturhistorischen Museums in Wien, Band 2. Geologisch-Paläontologische Reihe 2. Verlag von Franz Deuticke, Leipzig und Wien 1923. 229 S. Grundzahl 32[1].

Das groß angelegte Werk zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teile erscheinen die Kenntnisse von der Tektonik der Lessinischen Alpen nach den Beobachtungen, die entweder vom Verfasser selbst im bezeichneten Gebiete als Aufnahmsgeologe im Kriege gemacht oder aus anderen Quellen geschöpft wurden, übersichtlich zusammengestellt; im zweiten wird versucht, auf dieser Grundlage zu einer zusammenfassenden Darstellung der gebirgsbildenden Vorgänge u. zw. zunächst zum Studium der räumlichen Verteilung der tektonischen Erscheinungen vorzudringen. Der erste Teil wird sicherlich eingehend von den zünftigen Geologen gewürdigt werden. An dieser Stelle soll ausschließlich der zweite Teil zur Erörterung gelangen, weil der Verfasser die erwähnte Zusammenfassung auf Grund der Methoden der mathematischen Statistik (der Variationsstatistik) vorgenommen und damit den ersten Versuch gemacht hat, die Variationsstatistik auch auf diesem Gebiete einzubürgern. Er wollte nämlich aus den zahlreichen einzelnen Beobachtungsdaten, die mehr, weniger voneinander abweichen, einheitliche, für die einzelnen tektonischen Eigenschaften eines Gebietes charakteristische und den quantitativen Vergleich ermöglichende Zahlenwerte ableiten.

Die Grundlagen (Elemente) seiner Darstellung bilden die Fallzeichen in 10 verschiedenen Berggruppen der nördlichen Lessinischen Alpen bezw. die bei diesen gemessenen Fallwinkel und die Fallrichtung. Die Zusammenfassung sollte zur wissenschaftlichen Feststellung der Stärke des Gefälles und der Hauptrichtung der Faltung dieser Gebirgsstöcke sowie zur analogen Charakteristik der Nebenrichtungen (der Interferenzen) führen. Sinnfällig kommt dieses Ziel in der Uebersicht des Faltungszustandes des obbezeichneten Gebietes auf Seite 208/209 des Werkes, insbesondere aber in den daselbst konstruierten 10 Diagrammen für den Faltungszustand von 10 Berggruppen (der Lissergruppe, des Kempelplateaus samt Melettagruppe, des Verena-, Manderiolo, Tonezza-, Lavarone-, Campomolon-, Scamucchio-, Pasubio-Plateaus und des Finocchio) zum Ausdruck.

[1]) Bei direktem Bezuge bei der geologischen Abteilung des naturh. Museums unter Beibringung der üblichen Erklärung über den Eigenbedarf 120 000 K.

Gelöst wird hierbei eine überaus reiche Fülle von Aufgaben: die Darstellung der Abhängigkeit der Fallzeichen von der Beschaffenheit des Terrains; die Beschreibung des Verlaufes der Fallwinkel einzelner Gebirgsstöcke (der Lavarone-Flexur und der Sieben-Gemeinde-Flexuren) mit Hilfe der Maße der Variationsstatistik (mittlerer Fallwinkel, Fallwinkelstreuung, Schiefe und Exzeß der Häufigkeitskurve, die die Abhängigkeit der Anzahl und Größe der Fallwinkel repräsentiert); die Charakteristik des Faltungszustandes der Gebirgsstöcke nach Stärke und Richtung auf zwei verschiedenen zur geometrischen Repräsentation sich eignenden Wegen (nach der Methode des Halbdiagrammes und des Diagrammes); die Berechnung der allgemeinen Schichtneigung; die Ausgestaltung der Diagrammzeichnung; die Korrelation zwischen Fallwinkel und Fallrichtung.

Die Arbeit ist in methodischen Belangen in engster Fühlung mit dem bekannten Werke von Johannsen »Die Elemente der exakten Erblichkeitslehre« verfaßt, dem sogar die Bezeichnungsweisen für die statistischen Maßzahlen entlehnt sind, die Theorie jedoch entsprechend dem weit schwierigeren Stoff ausgestaltet worden. Die Tektonik erfordert nämlich in der Regel die Behandlung der Variation der Elemente nach zwei Richtungen (der Fallzeichen nach Fallwinkel und Fallrichtung), somit die Behandlung zweistufiger Erscheinungen: die Korrelationstheorie wurde hierzu nur wenig herangezogen.

Die Lektüre des Werkes bereitet dem Variationsstatistiker natürlich außerordentliche Schwierigkeiten. Von der Fremdheit des Stoffes abgesehen, wird der Autor seiner Denkungsweise zu wenig gerecht. Und wenn auch dem Autor zugebilligt werden mag, daß bei der statistischen Behandlung tektonischer Probleme der erste Bearbeiter entweder auf dem Gebiete der Tektonik oder dem der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein Laie sein mußte und der Wahrscheinlichkeitstheoretiker sicherlich zur Lösung der Aufgaben weniger geeignet gewesen wäre, so konnte es sodann nicht fehlen, daß einerseits der Variationsstatistiker mancherlei, wenn auch von der richtigen Empfindung des Tektonikers geschickt überbrückte Lücken findet, und andererseits der letztere das Ziel der Untersuchungen viel zu weit steckt und sich insbesondere von seinem ursprünglichen Vorhaben, eine Beschreischreibung tatsächlicher Zustände zu liefern, entfernt.

In ersterem Belange geht der Autor auf die wichtige Vorfrage, ob solche Anwendungen der Variationsstatistik überhaupt möglich oder zumindest zweckmäßig sind, nicht genügend tief ein. Angesichts der vielfachen Kritik, welche die Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre im Gebiete der Massenerscheinungen erfahren hat (v. Kries), kann es nicht befriedigen, wenn der Autor schließlich (S. 227) versichert,

daß die Hauptschwierigkeit der statistischen Tektonik in der richtigen Abschätzung der Gebiete beruhe, deren Fallwinkel zusammen behandelt werden, und daß in diesem Belange das Ergebnis der Untersuchung von der Auffassung über die tektonische Einheit eines Gebirgsstockes (also lauter subjektiven Momenten) ebenso abhänge, wie das Wahlergebnis für politische Vertretungen von der Wahlkreisgeometrie.

Es soll sohin im folgenden versucht werden, zunächst die Ausführungen des Autors für den Mathematiker zu ergänzen und insbesondere die üblichen Kriterien der Variationsstatistik für die Anwendbarkeit auf die Beobachtungen im Gebiete der Tektonik heranzuziehen. Die Frage, ob sich irgend eine Massenerscheinung zur statistischen Behandlung eigne, kann nur in wenigen Fällen a priori entschieden werden. Auch die vorliegenden Beobachtungen gehören ersichtlich nicht dazu. Der Verfasser meint zwar an einer Stelle seiner Ausführungen (S. 118): »Die Verteilung der Messungen im Felde wird durch Ursachen bedingt, die von der Lagerung der Schichten zum großen Teile unabhängig sind, wie besonders die Verteilung der künstlichen Aufschlüsse, die Gangbarkeit des Terrains, die Deutlichkeit der Schichtung u. a. m. In erster Annäherung werde man deshalb annehmen dürfen, daß die Häufigkeit eines Fallzeichens in den Aufnahmsnotizen der Fläche, auf der ein bestimmtes Einfallen herrscht, oder — was dasselbe ist — der Anzahl der überhaupt möglichen gleichartigen Messungen proportinal sei.« Er knüpft damit ersichtlich an den Wahrscheinlichkeitsbegriff v. Mises' (die regellose Zuordnung der Punktmengen des Merkmalraumes an die Elemente eines Kollektivs) an. An anderer Stelle (S. 193) werden jedoch Umstände vorgewiesen, bei deren Eintritt sich eine Zufälligkeit in der Verteilung der Fallzeichen nicht beweisen läßt (örtliche Störungsbezirke, Zerfällung eines Gebietes in mehrere tektonische Einheiten, in denen die Gefaltetheit, aber auch die Fallzeichendichte stark verschieden ist). Auch drängt zur nachträglichen Prüfung, daß der Autor an mehreren Stellen der doch längst überwundenen subjektiven Wahrscheinlichkeit das Wort redet, indem er beispielsweise (S. 98) meint, daß der Aufnahmsgeologe davor nicht zurückschrecken dürfe, in das Notizbuch Zahlen einzutragen, für deren Richtigkeit die volle Verantwortung nicht übernommen werden kann, wenn man sich nur vor der Bevorzugung gewisser Werte hüte.

Die Variationsstatistik lehrt nun, daß jede beliebige einstufige statistische Reihe in der Form

$$y_x = M\left[\varphi(x') + \frac{S}{2\sqrt{2}}\,\frac{\varphi^{\mathrm{III}}(x')}{2^2} + \frac{E+3}{2}\,\frac{\varphi^{\mathrm{IV}}(x')}{2^3} + C_5\,\varphi^{\mathrm{V}}(x') + C_6\,\varphi^{\mathrm{VI}}(x')\right]$$

nach einer sogenannten Bruns-Reihe dargestellt werden kann, worin $\varphi(x') = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{xh} e^{-t^2}dt$, $x' = xh$, $\varphi^{\mathrm{II}}(x') = 0$, $\varphi^{\mathrm{III}}(x')$, φ^{IV}, φ^{V}, φ^{VI} die Ableitungen von φ bis zur VI. Ordnung, S die Schiefe, E den Exzeß, C_5 und C_6 weitere Konstanten bedeuten.

Je nach den zu lösenden Problemen werden von denselben verschiedene Voraussetzungen gemacht. In der Versicherungsstatistik fordert man, daß sie von der Zeit wenig abhängen, damit nach gewonnener Erfahrung ein Budget für künftige Einnahmen und Ausgaben aufgestellt werden kann. Der Verfasser strebt an, die zahlreichen, zum Teil widersprechenden Messungsergebnisse durch vereinzelte, charakteristische Zahlenwerte zu ersetzen. Es müßte also die linke Seite der Gleichung durch wenige, etwa die drei ersten Glieder der rechten Seite darstellbar sein. Darüber können aber die Beispiele des Verfassers die Aufklärung bringen.

1. Die Häufigkeitskurve der Fallwinkelsumme ohne Rücksicht auf die Fallrichtung. In der Lavaroneflexur ergibt sich bei Berücksichtigung von drei Reihengliedern

im Abstande vom Normalwerte (der Mode)	eine Fallwinkelsumme aller Beobachtungen von Ost aus gelesen nach		im Abstande vom Normalwerte (der Mode)	eine Fallwinkelsumme aller Beobachtungen von Ost aus gelesen nach	
	Beobachtung	Berechnung		Beobachtung	Berechnung
— 4	—	5,5	5	193,5	189,1
— 3	17	21.3	6	197,5	189.6
— 2	54,5	50,2	7	200	194,2
— 1	93,5	88,3	8	201,5	198,8
0	126	128,4	9	202,5	202,9
1	150	161	10	204	205,8
2	166.5	181,7	11	205,5	207,6
3	179	190	12	207	208 4
4	188	190,5	13	208,5	208,7

In den Sieben-Gemeinde-Flexuren ergibt sich unter gleichen Voraussetzungen:

im Abstande vom Normalwerte (der Mode)	eine Fallwinkelsumme aller Beobachtungen von Ost aus gelesen nach		im Abstande vom Normalwerte (der Mode)	eine Fallwinkelsumme aller Beobachtungen von Ost aus gelesen nach	
	Beobachtung	Berechnung		Beobachtung	Berechnung
— 5	5	6,1	4	127	127,8
— 4	17	15	5	131	132,5
— 3	22	33,7	6	134	133,8
— 2	52	47,4	7	136	137,2
— 1	71,5	67,7	8	138	139,7
0	90	87,6	9	140,5	142,9
1	104,5	104,7	10	143	144,3
2	115	117,3	1	145,5	145,8
3	122,5	125,2	2	147,5	147,3

Man wird demnach gegen die Darstellung der Fallwinkelsumme auch vom Standpunkte der Variationsstatistik keinen Einwand erheben; vielmehr erweisen sich die Bedenken in die Art der Beobachtung, die durch den Autor selbst geweckt werden, als unberechtigt. Andererseits dürfen übertriebene Erwartungen aus

den beiden Reihen natürlich nicht abgeleitet werden. Die Anwendung der Variationsstatistik auf Anthropometrie und Sterbestatistik hat eine mehr als 100 jährige Erfahrung hinter sich und doch manche Irrgänge zu verzeichnen. Vorläufig kann nur gefolgert werden, daß es in zwei Fällen gelang, eine Erscheinung der Tektonik in einen einfachen analytischen Ausdruck zu kleiden und daß man (in Uebertragung des wahrscheinlichkeitstheoretischen Hintergrundes der Bruns-Reihe) schließen kann, daß eine Veränderung in der Zahl der Fallzeichen den Charakter der darstellenden Reihe nicht geändert hätte. Es muß daran der Wunsch gefügt werden, daß die Versuche des Autors die Fortsetzung finden. Die Johannsen entlehnte Berechnung des mittleren Fehlers aus der Präzisionsmaßzahl ist nicht nachahmenswert. Letzterem Maße kommt in asymmetrischen Frequenzkurven nicht die Bedeutung wie in der Normalkurve zu; andererseits sind ja bereits zweckmäßigere Maße (das Quartil, Perzentil) erdacht worden.

2. Die Häufigkeitskurve der Fallwinkelsumme nach Richtungsklassen. Auf Seite 119 stellt sich der Verfasser das Problem, die für 16 Richtungsklassen (die Hauptweltgegenden O, S, N, W, die Nebengegenden NO, SO, NW, SW und die Zwischengegenden NNO, SSW, ONO, WSW usw.), also je um $22^1/_2{}^0$ auseinanderstehende Himmelsgegenden berechneten Fallwinkelsummen womöglich noch zu einem einheitlichen zahlenmäßigen Ausdruck für den Faltungszustand des ganzen Gebietes zusammenzusetzen. »Man könnte daran denken, sie einfach als Klassen einer Variationsreihe aufzufassen, deren ordnendes Merkmal die Richtung ist, und aus ihnen den Mittelwert zu bilden. Dieser Versuch würde aber sofort daran scheitern, daß die Richtungsklassen nicht linear aufeinander folgen, sondern in einem Kreise angeordnet sind, so daß die Reihe in sich selbst zurückkehrt. Da in den meisten Fällen alle 16 Klassen durch Individuen vertreten sind oder aber — was auch nicht selten ist — die Reihe mehrere Unterbrechungen aufweist, wäre es rein willkürlich, welche Klasse man als die niedrigste bezeichnen will.«

Die Bemerkung ist nicht verständlich. Bezeichnet man irgend eine Himmelsgegend mit a und zählt die laufenden Richtungen nach rechts mit $a+1$, $a+2$, ... $a+15$, so ist der Mittelwert der Fallwinkelsummen $r_1, r_2, \ldots r_{16}$,

$$M = \frac{a r_1 + (a+1) r_2 + \ldots + (a+15) r_{16}}{r_1 + r_2 + \ldots + r_{16}} = a + \frac{\sum_1^{15} i\, r_{i+1}}{\sum_1^{16} r_i}.$$

Die Zahl M ist völlig eindeutig, wenn nicht alle r verschwinden; sie ist ferner ein von a unabhängiges, jedoch von r abhängiges Maß für die Verteilung der r, wenn nicht alle r gleich oder, wenigstens von einigen Nullstellen abgesehen, gleich sind. Nachdem die Werte a, $a+1$, $a+2$ ... nur Stellenzeiger sind, so wird die Nähe oder Ferne zweier Richtungen niemals aus den Absolutwerten dieser Größen erschlossen.

Auch darin liegt kein Hindernis, die Verteilung der nach Richtungen angeordneten Fallwinkelsummen genau in der Art wie die Verteilung der Fallwinkelsummen selbst zu behandeln, daß die Normalkurve nach beiden Richtungen vom Mittelwert asymptotisch ins Unendliche verläuft. Die mit zwei Restgliedern entwickelte Bruns-Reihe kann je nach Gestaltung der Fehlerkurve auch im Endlichen verschwinden. Ich habe demnach abermals die nach Himmelsrichtungen geordneten Fallwinkelsummen des Westabhanges des Finocchio (S. 120) nach der Bruns-Reihe behandelt und bin, von O über N, W nach OSO schreitend, zu folgender Zahlenreihe gekommen:

Richtung	Fallwinkelsumme		Richtung	Fallwinkelsumme	
	beobachtet	berechnet		beobachtet	berechnet
O	46,2	21,8	W	2254,8	2470,1
ONO	77	46,3	WSW	2803,8	2947,1
NO	86	97,3	SW	3055,2	3280,2
NNO	92	204,7	SSW	3214	3474,1
N	224	413,6	S	3459	3580,4
NNW	465,6	743,2	SSO	3619	3639,2
NW	903,4	1273,1	SO	3673	3671
WNW	1724,6	1876,8	OSO	3701	3688,4

Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung ist in den ersten 7 Werten nicht gegeben und würde selbstverständlich auch dann nicht aufscheinen, wenn die Fallwinkelsummen von einem zentralen Ausgangspunkt (WNW) gezählt würden. Zu größerer Koinzidenz würde man sicherlich durch Berücksichtigung von mehr Gliedern der Bruns-Reihe gelangen. Eine solche Problemlösung erfüllt jedoch nicht den vom Autor angestrebten Zweck der statistischen Methode, weil damit das Schlußergebnis nicht auf einen einfachen Ausdruck zurückgeführt, vielmehr die Darstellung von 16 Fallwinkelsummen die Heranziehung von mindestens 6 Konstanten erfordern würde.

Es kann also abermals dem Verfasser zugestimmt werden, wenn er im vorliegenden Falle die Darstellung der Fallwinkelsummen im Wege der Fehlertheorie gänzlich verließ und kurzweg die Originaldaten nach Bearbeitung durch ein plausibles Ausgleichsverfahren zur Charakteristik des Faltungszustandes verwendete. Solcher Ausgleichsverfahren werden zwei entwickelt (die Methode des Halbdiagramms und des Diagramms). In ersterem werden die Fallwinkelsummen jeder Richtung wie an einem Punkte angreifende Kräfte behandelt und aus allen Summen die Resultierende gebildet: sie stellt die Hauptachse der Faltung dar und bestimmt (von einer Korrektur abgesehen) die allgemeine Schichtneigung nach Größe und Richtung. Sie entfernt sich übrigens nicht allzu sehr von den Maßen nach der Fehlertheorie. Der Autor berechnet den Winkel zwischen der Resultierenden und

der Ostrichtung mit 168° 23,9', die Fehlertheorie ergibt 171° 3' 25"; er berechnet eine Resultierende von 2287,9, die einseitige Fehlerwinkelsumme würde 1876,8° betragen. In der zweiten Methode werden die Mittel gegenüberliegender Fallwinkelsummen berechnet und zur Bildung von 16 Fallwinkelresultierenden verwendet: es werden nämlich je 8 aufeinander folgende Mittel der Winkelsummen zu einer Resultierenden vereinigt. Bei Verbindung der Endpunkte dieser Resultierenden entsteht ein zentrisch symmetrisches Sechzehneck mit einer größten Achse (der Hauptsache der Faltung) und den übrigen sieben bzw. vierzehn Nebenachsen. Der Grund der zweiten Konstruktion ist der Umstand, daß im Halbdiagramm entgegengesetzt liegende Winkelsummen sich aufheben, während sie doch der Ausdruck derselben Faltung sind.

Das letztere Diagramm und drei Kreise vom Mittelpunkte aus dienen zur Charakteristik der Faltung sind also als Hauptergebnis der Untersuchung anzusehen. Ein Kreis, der Grundkreis, bildet den Maßstab für das Durchschnittsgefälle von 45 vH; ein zweiter Kreis (der Mittelkreis) den Maßstab für das tatsächliche Durchschnittsgefälle; ein dritter Kreis (der Interferenzkreis) den Maßstab für die Verkürzung des Durchschnittsgefälles bei Projektion der Fallwinkelsummen der verschiedenen Richtungen in die Hauptsache.

Ob das Diagramm den Tektoniker befriedigen und die Formen der Gebirgsstöcke ausreichend zur Darstellung bringen kann, haben die Geologen zu entscheiden. Vom mathematischen Standpunkt ist gegen die Grundlagen der Analyse kein Einwand zu erheben. Dagegen bedürfen die sämtlichen Ausführungen über die Genauigkeit der gefundenen Werte (S. 165 bis 172) der Vertiefung. Aus dem Umstand, daß sich die Projektion der Resultierenden als Summe der Projektionen der Komponenten ergibt, wird gefolgert, daß man jene als Mittelwert und diese als Einzelbestimmungen auffassen könne. Die Mittelwertgleichung ist eine Folge der Präzisionsmaßzahl, aus der sodann wieder der mittlere Fehler ableitbar sei. Solche Schlüsse haben natürlich mit der Grundaufgabe der Arbeit, einfache analytische Formen für die zum Teil widersprechenden Einzelbeobachtungen zu finden, nichts zu tun.

Noch sei im Kurzen auf zwei wesentlichere Untersuchungen im Werke hingewiesen. Trotzdem der Autor schon im I. Kapitel die Abhängigkeit der Variabilität der Fallzeichen vom Terrain studiert hat und danach die Verschiedenheit desselben in verschiedenen Gebirgsstöcken sowie die Unmöglichkeit des Auftretens negativer Fallwinkel zur Erklärung der Asymmetrien ausreicht, wird der Versuch unternommen, durch Drehung aller Fallwinkel in dieselbe Richtung die Schiefwinkligkeit der Fallwinkelkurve wenigstens teilweise zu beseitigen. Man gelangt hierdurch zum Begriff der allgemeinen Schichtneigung und zu dem interessanten Schluß, daß die Schichten im allgemeinen durch zufällige lokale Einflüsse leichter eine extreme Verstärkung ihrer Neigung, als eine Drehung in dem der allgemeinen Schichtneigung entgegengesetzten Sinne erfahren.

Zu dem gleichen Schluß führt die Erörterung der Beziehungen zwischen Fallrichtung und Fallwinkel im Wege der Korrelationstheorie. Die Zahl der Beispiele ist nur gering. Auch hier bedarf der Begriff des Korrelationskoeffizienten der Klärung, die Art der Bestimmung der Genauigkeit desselben der Revision.

Der Autor hat sich für seine Untersuchungen auch ein mittelbares Ziel gesteckt. Durch Einführung der Methoden der Variationsstatistik sollte die Tektonik zu genaueren Messungen und zur Vertiefung der Forschung gelangen. Bisher hat die statistische Methode in allen Forschungsgebieten zu diesem Ergebnis geführt und sie blieb fruchtbar, insolange sie nicht zum Selbstzweck erhoben wurde. Dies liegt aber dem Autor gänzlich fern. Nach den Ausführungen auf S. 99 hält er es für selbstverständlich, daß die statistische Tektonik stets nur eine sekundäre Rolle spielen wird, während die eigentliche Grundlage der Forschung immer die Verfolgung bestimmter stratigraphischer Niveaus bleibt.

Von der Fülle der Ergebnisse des Werkes wird sicherlich manches durch nachfolgende Forschung aus dem Gebiete der Statistik ausgeschieden werden, manches in anderer Form zur Behandlung gelangen. Die damit geschaffenen wesentlichen Grundlagen werden jedoch eine dauernde Errungenschaft der Tektonik und Variationsstatistik bleiben.

Wien, im Mai 1923. Blaschke. 309

L. LICHTENSTEIN, Dr. o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung. Mathematische Probleme in der Theorie der Figur der Himmelskörper. Verlag von S. Hirzel in Leipzig 1923. 97 S.

Das vorliegende kleine Buch ist eine stark erweiterte und durch einige mathematische Ausführungen ergänzte Wiedergabe der Antrittsvorlesung, die der Verf. bei Uebernahme eines Lehrstuhls für Mathematik an der Leipziger Universität gehalten hat. Die ersten beiden Kapitel, die wohl den Text der eigentlichen, an einen größeren Hörerkreis gerichteten, Antrittsvorlesung enthalten, geben eine vorzügliche Uebersicht über Entwicklung und Stand der beiden wichtigsten mathematisch-astronomischen Problemgruppen: die Frage der Bewegung der Gestirne und die klassischen Probleme der Gestalt der Himmelskörper. Hier hat es der Verf. in seltener Weise verstanden, auf weniger als 40 Seiten unter gänzlicher Vermeidung von mathematischen Formeln und ohne zu weitgehende Anwendung von Fachausdrücken, eine klare und präzise Darstellung der bisherigen Lösungsversuche dieser beiden überaus schwierigen Aufgaben zu geben. Ja, man möchte fast behaupten, daß es sich um eine in gewissem Sinne erschöpfende Darstellung handle, da unter den

angegebenen Beschränkungen kaum mehr gesagt werden konnte. Wer nur einiges Interesse für dieses älteste und am gründlichsten ausgebaute Anwendungsgebiet der Mathematik besitzt, wird nicht ohne Spannung die in großen Zügen skizzierte historische Entwicklung der Probleme verfolgen, die seit Jahrhunderten die besten Köpfe unter den Mathematikern in ihren Dienst gezwungen haben. Namentlich die Fragen der Gestalt und der allmählichen Entstehung der Himmelskörper sind geeignet, jeden, der Sinn für wissenschaftliche Naturauffassung hat, zu fesseln. Man sieht, wie hier aus den einfachsten Ansätzen von Newton und Huygens die Theorie allmählich aufgestiegen ist zu einem tief durchdachten und vielseitig verzweigten Aufbau, der sich heute nur noch mit den feinsten Mitteln der modernen Analysis beherrschen läßt. Der Verf., dessen eigenen Arbeiten man verschiedene wertvolle Ergänzungen und zum Teil abschließende Ergebnisse in der Theorie der Himmelskörper verdankt, bringt schließlich in dem dritten etwas längeren Abschnitt des Buches eine kurze, referierende Darstellung der mathematischen Theorie, hauptsächlich auf Grund seiner eigenen früheren Untersuchungen. Dieser Teil der schönen, auch sprachlich ausgezeichneten Schrift wendet sich nur an den mathematisch gebildeten Leser.

Mises. 310

NACHRICHTEN

August Föppl. Am 25. Januar d. Js. wird Geheimrat Föppl, Professor an der Technischen Hochschule in München, 70 Jahre alt. Selten hat ein Vertreter der technischen Mechanik auf ihren verschiedenen Teilgebieten so viele wertvolle Arbeiten aufzuweisen wie er, und als eine kraftvolle, eigenartige Ingenieur- und Gelehrtenpersönlichkeit steht er vor unseren Augen. Durch sein bedeutendes sechsbändiges Werk über technische Mechanik und seine bahnbrechenden Arbeiten auf dem Gebiete der Statik und Dynamik ist er in weitesten Kreisen bekannt geworden und fruchtbringend hat er durch seine große Schülerzahl gewirkt.

Geboren 1853 in dem kleinen Städtchen Groß-Umstadt in der Nähe von Darmstadt, und aufgewachsen in Höchst im Odenwald, besuchte er nach seinem Maturum auf dem Realgymnasium in Darmstadt zunächst die dortige Hochschule und siedelte später nach Stuttgart über, wo Otto Mohr seine wissenschaftliche Einstellung offenbar wesentlich beeinflußte. Nach kurzer Tätigkeit in der Praxis wirkte er zuerst an der Baugewerkschule in Holzminden und dann von 1877 an 15 Jahre lang an der Städtischen Gewerbeschule in Leipzig. Bei seinen damaligen Arbeiten kam ihm, wie er später erzählte, ein Mangel an physikalischen Kenntnissen zum Bewußtsein und er trieb deshalb bei Gustav Wiedemann physikalische Studien, die ihn zu verschiedenen theoretischen Arbeiten anregten. Im Jahre 1886 promovierte er in Leipzig mit einer Arbeit über »Mathematische Theorie der Baukonstruktionen: 1. Theorie der Fachwerke, 2. Theorie der Gewölbe.«

Durch seine Veröffentlichungen der achtziger Jahre machte sich A. Föppl als Ingenieur von vielseitigem Wissen und mit hohem Verständnis für theoretische Fragen bekannt, und als 1892 an der Leipziger Universität ein Extraordinariat für landwirtschaftlichen Maschinenbau eingerichtet wurde, berief man ihn auf diesen Lehrstuhl. Damit wurde er auf ein ihm zunächst ganz fernliegendes Fachgebiet gestellt, in das er sich aber mit kraftvoller Energie rasch einarbeitete. Nur kurze Zeit wirkte er in dieser Stellung und folgte 1894 einem Rufe an die Technische Hochschule in München, wo er das Gesamtgebiet der technischen Mechanik allein vertrat und das Festigkeitslaboratorium, das unter seinem Vorgänger Bauschinger einen bedeutenden Namen errungen hatte, leitete. 1921 wurde er emeritiert, liest aber an der Hochschule zur Freude interessierter Studierender noch einige Sondervorlesungen.

Schon kurze Zeit nach seiner Anstellung an der Leipziger Gewerbeschule brachte A. Föppl ein Werk von hervorragender Bedeutung heraus, das von der Kraft eigener Forschung zeugte: „Theorie des Fachwerkes", Leipzig 1880. Es enthielt eine ganze Reihe neuer Gedanken und Ergebnisse; Föppl stellt hier als Erster die mathematische Bedingung für ein kinematisch und ein statisch bestimmtes Fachwerk auf, gibt wichtige Sätze für die Stabilität von Fachwerken an und hat sich unabhängig von Mohr mit aller Deutlichkeit dahin ausgesprochen, daß eine Berechnung der Fachwerke auf kinematischem Wege möglich sei. Schon in diesem Buche geht er grundlegend auf räumliche Fachwerke ein und schloß daran in den nächsten 12 Jahren, seinem ersten Arbeitsgebiet treu bleibend, eine Reihe bedeutender Arbeiten über die Raumfachwerke an, die eine Fülle von anregendem Stoffe enthalten. A. Föppl schuf im wesentlichen die Theorie des Raumfachwerkes und führte verschiedene neue Begriffe und Fachwerkformen ein (Flechtwerk, Netzwerkkuppel), die die Grundlage für eine fruchtbare Weiterentwicklung dieser Systeme boten. Der Einsturz der Mönchensteiner Brücke, 1890, regte ihn zu neuen Untersuchungen an und veranlaßte ihn, 1891 sein Werk: »Das Fachwerk im Raume« zu schreiben, das in einem Zuge innerhalb zweier Monate niedergeschrieben ist, zum ersten Male eine geschlossene Darstellung der Raumfachwerke gibt und eine Menge wichtiger Ergebnisse aufweist.

Nach dem Jahre 1892 beschäftigte sich Föppl weniger mit Raumfachwerken; erst die Schaffung der Zimmermann'schen Kuppel veranlaßte ihn, wieder darauf zurückzukommen und eine Arbeit über die zeichnerische Ermittlung der Stabkräfte dieser Kuppel zu schreiben; im übrigen hatte sich sein Interesse ganz anderen Arbeitsgebieten zugewandt.

Bezeichnend für die schöpferische Persönlichkeit A. Föppls ist es, daß er kurz nach seinem Werke über das Raumfachwerk, während seiner Wirksamkeit als a. o. Professor in dem ihm fremden landwirtschaftlichen Maschinenbau, ein Buch auf einem ganz entferntliegenden Gebiet herausbrachte: „Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität", das in Fachkreisen großes Aufsehen erregte, von tiefer Wissenschaftlichkeit zeugt und erkennen läßt, daß es Föppl verstand, die den Ingenieur bewegenden Fragen in klarer, anregender Form zu behandeln. Daß es wesentlich zur Einführung der Vektorenrechnung in Deutschland beitrug, sei nebenbei bemerkt. Ueber die Elektrizitätslehre hielt er auch später an der Technischen Hochschule öfter Vorlesungen, die von dankbaren Studenten sehr begrüßt wurden.

Wie sehr A. Föppl vom Unterricht selbst gefesselt wurde, zeigt schon zur Genüge die während seiner Tätigkeit an der Leipziger Gewerbeschule erfolgte Ausgabe eines 2 Bändchen umfassenden Werkes: „Leitfaden und Aufgabensammlung aus der technischen Mechanik", 1890, das für die unteren und mittleren technischen Lehranstalten zugeschnitten ist und in dem in mancher Beziehung die Eigenart des Verfassers auf dem Gebiete der technischen Mechanik schon zum Ausdruck kommt. Dies Interesse für das Lehren, seine Liebe zum Unterrichten war wohl auch ein Hauptgrund, der ihn, nachdem er einige Jahre an der Technisesen Hochschule in München gewirkt und den Aufbau und die Durchführung seines Vorlesungsstoffes als zweckmäßig erkannt hatte, veranlaßte, die „Vorlesungen aus der technischen Mechanik" in Buchform herauszugeben; zunächst in 4 Bänden, später aber in 6 Bänden, wobei der fünfte Band die höhere Festigkeitslehre und der sechste die höhere Dynamik behandelt. Was dies Werk für Studenten, Ingenieure und Mathematiker bedeutet, ist bekannt. Nur wenige Lehrbücher von Wissenszweigen der Hochschulen haben einen solchen Erfolg gehabt, wie dies Föppl'sche Werk; schnell hintereinander folgten die Neuauflagen, später Uebersetzungen, und zeigten zur Genüge, daß nicht nur seine Schüler, sondern auch weite andere Kreise das Buch mit Vorliebe benutzten. Daß dem Werke neben der gewaltigen beifälligen Aufnahme auch Kritiker entstanden, die es zum Teil zu theoretisch, zum Teil zu wenig mathematisch-genau fanden, kann nicht überraschen, da sich Föppl bewußt von zu weitgehender Forderung nach der einen oder anderen Seite fernhalten und seine Vorlesungen so gestalten wollte, daß einer möglichst großen Menge von wissenschaftlich geschulten Ingenieuren bestens gedient wurde; und das ist ihm denn auch in vollem Maße gelungen.

Föppl's Vorträge auf der Hochschule zeigten die besondere Eigentümlichkeit, daß er nicht lehrmäßig vortrug: er wiederholte nicht die schwierigeren Ausführungen nochmals etwa mit anderen Worten, suchte also nicht eindringlich zu unterrichten, sondern trug den Stoff so vor, wie er ihn auch niedergeschrieben hat. Dadurch waren wohl seine Vorträge der großen Masse nicht gerade leicht verständlich, aber beanlagten Schülern und solchen, die schon Vorkenntnisse und Verständnis für die Mechanik mitbrachten, bot er gerade dadurch einen besonderen Genuß, und es war ihm durch die Art seines Vortrags möglich, viel mehr Stoff zu bringen, als es an anderen Hochschulen üblich ist. Besonderen Wert legte er auf möglichst einfache, klare Behandlung und Durchführung der Aufgaben und darauf, daß der Schüler mit grundlegenden Gleichungen eine Anschauung verband. Dies zeigen z. B. seine Darstellung des Schwerpunkts- und Flächensatzes mit den verschiedensten Anwendungen, wie Massenausgleich von Schiffsmaschinen, sowie die Einführung und Klarlegung mancher Begriffe, z. B. des „Drall". Gerade dadurch hat er seine Schüler besonders günstig beeinflußt und bewirkt, daß sie sich von schematischen Rechnungen in der Mechanik frei hielten.

Neben den erwähnten Werken veröffentlichte A. Föppl eine große Reihe von Abhandlungen, in denen er sich mit den verschiedensten Fragen beschäftigte. Soweit sie sich auf Festigkeitslehre beziehen, sind sie fast alle in den „Mitteilungen des mechanisch-technischen Laboratoriums der Technischen Hochschule München" abgedruckt. Die von ihm auf dem Gebiete der Dynamik herausgebrachten Arbeiten behandeln und lösen Probleme von großer Wichtigkeit und allgemeiner Bedeutung. So gab Föppl im Jahre 1895 als Erster eine klare Theorie der kritischen Schwingungen von rasch umlaufenden Wellen. Großes Aufsehen erregte seine „Theorie des Schlick'schen Schiffskreisels", die er 1903 veröffentlichte. Daß sich Föppl schon vor den bahnbrechenden Veröffentlichungen Einsteins mit Fragen der Relativitätstheorie befaßte, beweist seine 1914 der bayrischen Akademie der Wissenschaften vorgelegte Arbeit über "Absolute und relative Bewegung", die auf Kreiselversuche zurückging, die er seit 1904 in München angestellt, um die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde zu bestimmen.

Nach Abschluß des Weltkriegs gab A. Föppl mit seinen Söhnen noch zwei Werke heraus, die schnell bekannt und gewürdigt wurden: 1920 mit Ludwig Föppl das zweibändige Werk „Drang und Zwang" und 1923 mit Otto Föppl „Grundzüge der Festigkeitslehre", beides wertvolle Bücher, die sicherlich trotz der schweren Zeitverhältnisse gute Verbreitung finden werden.

So steht der Jubilar in voller Schaffenskraft vor uns, und wir dürfen wohl hoffen, daß er noch manche gute Arbeit veröffentlichen

wird. Sein Leben war auf dem Gebiete des Forschens und Lehrens ein selten fruchtbringendes gewesen, und mit besonderer Freude darf es ihn an seinem 70. Geburtstage erfüllen, daß es ihm auch an der verdienten reichen Anerkennung für sein Wirken und sein Arbeiten nicht gefehlt hat, und daß er erheblich dazu beigetragen hat, daß jetzt in der Zeit der politischen Ohnmacht unseres Vaterlandes der deutsche Namen im Auslande durch wissenschaftliche Leistungen seinen alten Klang voll behalten hat. 373

Darmstadt. W. Schlink.

Internationaler Kongreß für Mechanik. Einer überaus erfreulichen Initiative unserer niederländischen Fachgenossen ist es zu verdanken, daß im kommenden Frühjahr zum ersten Mal ein internationaler Kongreß, der sich mit dem wesentlichen Aufgabengebiet dieser Zeitschrift befaßt, zusammentreten wird. Die Herren Biezeno, Burgers und Schouten in Delft, Wolff in Amsterdam versenden, unterstützt von Gelehrten aller Länder eine Einladung für den 22—25. April 1924 nach Delft. Auf dem Kongreß wird in drei Sektionen die rationelle Mechanik, die Elastizitäts- und Festigkeitslehre, endlich die Hydro- und Aerodynamik mit Einschluß der Flugtechnik behandelt werden. Von den vier Sitzungstagen sind zwei für allgemeine Sitzungen und zwei für Sektionssitzungen bestimmt. In den allgemeinen Sitzungen sollen zusammenfassende Berichte über Gegenstände, die in den letzten Jahren besonders gefördert wurden, zum Vortrage kommen, z. B. Praktische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen, Spannungsverteilung in plastischen Körpern, Bruchtheorie; Stabilität von Flüssigkeitsbewegungen, Wellenbewegung, Grenzschichten an festen Wänden; Turbulenz der Ozeane und der Atmosphäre, Dynamik der Atmosphäre. Von Seiten Deutschlands ist die Einladung gezeichnet von v. Kármán-Aachen, v. Mises-Berlin und Prandtl-Göttingen. Außer Deutschland und Holland sind in dem einladenden Komitee England, Amerika, Italien, Schweiz, Oesterreich, Norwegen, Schweden, Tschecho-Slowakei vertreten. 374

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Zur Theorie und Praxis des Auswuchtens. Der in Heft 2 erschienene Aufsatz von Hrn. v. Brauchitsch über das Auswuchten erfordert vom praktischen Standpunkte aus in den Ausführungen über das »statische Auswuchten« eine Berichtigung. Der Literaturnachweis des Aufsatzes enthält die Arbeiten von Lawaczeck und Heydebrock, die als wesentliche Begründung für die Notwendigkeit des dynamischen Auswuchtens die auf der rollenden Reibung beruhende Ungenauigkeit des statischen Ausbalanzierens auf Schienen und Rollen anführen. Diese bisher wesentliche Begründung des dynamischen Auswuchtens übergeht der Verfasser und legt alle Betonung auf den »dynamischen Fehler«, nimmt also einen anderen Standpunkt ein als die genannten Arbeiten. Objektiv muß darauf hingewiesen werden, daß dieser eine Grund für das dynamische Auswuchten heute hinfällig ist, nachdem die Schwerpunktwagen für die Praxis erfolgreich durchgebildet worden sind. Die praktischen Schwierigkeiten des Arbeitens mit allen in kritischen Umlaufzahlen arbeitenden dynamischen Auswuchtmaschinen sind so groß, daß die heute mögliche, genaue und schnelle Verlegung des Gesamtschwerpunktes in die Drehachse auf der Schwerpunktwage als großer technischer Fortschritt zu werten ist. Dieser Bedeutung der Schwerpunktwage wird der Verfasser nicht gerecht; auch seine Behauptung, die Schwerpunktwage schlösse sich dem Bau der Gewichtwage mehr oder weniger eng an, ist m. E. unrichtig.

Ferner liegt ein Widerspruch darin, daß der Verfasser sagt, er wolle nur die Auswuchtung starrer Körper behandeln, dabei aber das Bild eines Turbinenläufers bringt. Denn ein Turbinenläufer ist kein starrer Körper, sondern hat eine elastisch nachgiebige Welle. Berücksichtigt man, wie es notwendig ist, diese Wellennachgiebigkeit, so kommt man zu anderen Schlußfolgerungen hinsichtlich der Bedeutung des genauen statischen Auswuchtens, als es in Abschnitt 4 des genannten Aufsatzes geschieht. Der Inhalt dieses Abschnittes ist daher nicht allgemein beweiskräftig. Die in Frage kommenden tatsächlichen Verhältnisse sind von mir in der Zeitschrift »Maschinenbau — Gestaltung« Heft 25/26, 1923 unter Berücksichtigung der vom Auswuchtproblem nicht zu trennenden, elastischen Verbiegungen der Körper behandelt.

Folgende drei Punkte erscheinen mir für das Auswuchten technisch und wirtschaftlich wichtig: 1. Jeder Fehler, der sich im Erdschwerefeld beseitigen läßt, ist aus wirtschaftlichen und Zuverlässigkeitsgründen nur im Erdschwerefeld und nicht durch Fliehkraftwirkung zu beseitigen. Dabei sind alle durch ihre Reibung unvollkommenen statischen Schienen- und Rollenapparate durch die reibungsfrei arbeitenden Schwerpunktwagen zu ersetzen, was die praktische Notwendigkeit des dynamischen Auswuchtens wesentlich vermindert. 2. Genügt die Ausbalanzierung auf der Schwerpunktwage, dann ist von jeder weiteren Auswuchtung abzusehen; genügt sie nicht, so ist der verbliebene, reine »dynamische Wuchtfehler« in einem zweiten Arbeitsgang »dynamisch« zu beseitigen. Zu diesem Zweck dienen die »vereinigten (statischen und dynamischen) Schwerpunkt- und Teilschwerpunktmaschinen

bezw. -wagen«, über die in dem oben er- erwähnten Aufsatz ebenfalls berichtet wird. 3. Die dynamische Auswuchtung allein, ohne genaue statische Kontrolle, birgt erfahrungsgemäß im praktischen Betrieb die große Gefahr der Verwuchtung, d. h. der Erzeugung eines Zustandes, bei welchem der Gesamtschwerpunkt außerhalb der Drehachse liegt.

Essen. H. Hort. 345

Erwiderung. Zweck des Aufsatzes des Verfassers war es, die theoretischen Grundlagen des Auswuchtens anzugeben, nach deren Kenntnis der Ingenieur der Praxis selbst beurteilen könnte, in welcher Weise er eine richtige Auswuchtung durchführen müsse. In diesem Sinne scheint es auch jetzt nicht nötig, den Aufsatz zu erweitern oder zu verbessern. Er steht in keinerlei Widerspruch zu den angeführten Aufsätzen von Heidebroek und Lawaczek, die er vielmehr nur erweitert hat. Die Ausführungen beruhen lediglich auf den Gesetzen der Mechanik; diese zu erweitern oder zu verbessern, erscheint nicht angebracht. Die Gesetze der Mechanik besagen: daß ein Kraftkreuz nie durch eine Einzelkraft beseitigt werden kann. Da eine Schwerpunktwage nie ein Kräftepaar, sondern nur eine Einzelkaft beseitigen kann, so besteht bei ihrer Verwendung stets die Möglichkeit, daß auch nach der Benutzung der Schwerpunktwage am Drehkörper im Betriebe ein Störkräftepaar sich höchst lästig bemerkbar macht. Der vom Herrn Einsender bezüglich der Schwerpunktwage erwähnte »... Fortschritt ..., daß die genaue Verlegung des Gesamtschwerpunktes in die Drehachse heute höchst wirtschaftlich in kürzester Zeit bei Körperstillstand zu erreichen ist«, ist eben nur ein Teilfortschritt. Der Verfasser bezweifelt nicht, daß auf der Schwerpunktwage in kürzester Zeit der Drehkörper zur Ruhe kommt, der Schwerpunkt also in der Drehachse liegt. Er weist aber in seinem Aufsatz nach, daß dann (außer bei schmalen Scheiben, etwa bei Schwungrädern) die Auswuchtung noch nicht beendet ist, daß das restliche Störkräftepaar, zu deren Beseitigung die Schwerpunktwage unbrauchbar ist, im Betriebe Störungen von einer Größenordnung hervorrufen kann, als ob überhaupt keine Auswuchtung stattgefunden habe. Die Auswuchtmaschine Lawaczek-Heymann kann eben grundsätzlich jede, die Schwerpunktwage nur einen Teil der Unsymmetrie in einem Drehkörper beseitigen. Diese Ueberlegungen, die die Einwände, auch die wirtschaftlichen, des Herrn Einsenders entkräften, sind durchweg im Aufsatz schon eingehend behandelt. Sie haben in der mehrjährigen Auswuchtpraxis des Verfassers ihre volle Bestätigung gefunden.

Zu den drei Hauptsätzen des Herrn Einsenders wäre folgendes zu bemerken:

zu 1. Die im ersten Teil ausgesprochene Forderung ist weder praktisch noch theoretisch notwendig; jedenfalls fehlt der Beweis dafür. Unrichtig ist die Ansicht, daß die Anwendung der Schwerpunktwage die Notwendigkeit des dynamischen Auswuchtens wesentlich vermindern. Sie hat darauf überhaupt keinen Einfluß; Beweis: Eine Einzelkraft kann kein Kräftepaar aufheben. zu 2. Ergebnis der Praxis: Die statische Ausbalanzierung genügt im allgemeinen nicht (ausgenommen etwa bei Schwungrädern). Folge: Dynamisches Nachwuchten ist grundsätzlich notwendig. Der geteilte Arbeitsgang (Schwerpunktwage und dynamisches Nachwuchten) ist aber unwirtschaftlicher als der in der allgemeinen Auswuchtmaschine (Lawaczek-Heymann) vereinigte Arbeitsgang. zu 3. Der Satz ist nach Erfahrung des Verfassers nicht haltbar. Eine Verwuchtung oder irgend ein anderer Restfehler ist bei der allgemeinen Auswuchtmaschine nur bei ungeeigneter Handhabung der Maschine möglich.

Dieser letzte Satz galt, wie der Aufsatz eingehend ausführt, für technisch hinreichend starre Körper. Inzwischen ist dem Verfasser mitgeteilt worden, daß ein Verfahren werkstattreif ist, das auch die allgemeine Auswuchtung elastischer Drehkörper auf der Lawaczek-Heymann-Maschine einwandfrei erledigt. Da er das Verfahren nicht selbst praktisch erprobt hat, enthält er sich zunächst des Urteils. Er hält es aber für notwendig, darauf hinzuweisen, daß die Einbeziehung elastischer Körper in das Auswuchtproblem die auf ihrer Einseitigkeit beruhende Unterlegenheit jeder statischen gegenüber jeder allgemeinen Auswuchtmaschine keinesfalls zugunsten der statischen wird verändern können. Das Auswuchtproblem elastischer Körper hat mit der Frage »statisch-dynamisch« nichts zu tun. Denn auch für elastische Körper gilt der Satz, daß eine Einzelkraft kein Kräftepaar beseitigen kann.

Eberhard v. Brauchitsch. 345a

Berichtigung

zur Arbeit »Ueber Biegungsschwingungen stabförmiger Träger« in Heft 1, Bd. 2, S. 34:

Der auf Seite 39 Zeile 20 berechnete Ausdruck für A_r gilt nur für die Amplituden $A_1, A_3, A_5 \ldots$ der symmetrischen Schwingungen, dagegen werden $A_2, A_4, A_6 \ldots$ infolge des hier zugrunde gelegten symmetrischen Belastungsfalles zu Null. Bei der Berechnung des Anfangszustandes ist angenommen, daß das Trägergewicht gegenüber dem Gewicht des stoßenden Körpers vernachlässigt werden kann.

W. Kaufmann.

(Redaktionsschluß 31. Dezember 1923.)

Verantwortlich: für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43; für den Anzeigenteil Fritz Noack, Berlin-Niederschönhausen.
VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin. — Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

VOLS I-XIX
1921-39

Vol. IV

UNIVERSITY MICROFILMS